# الفصل الرابع

## المستـــوي

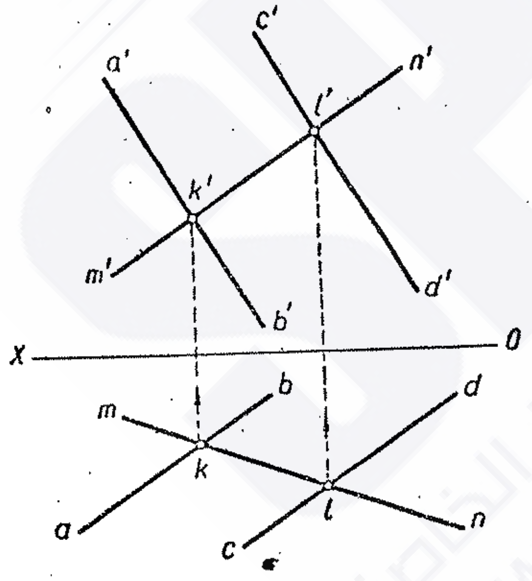
### أولا ـ أمثلة تطبيقية :

ا ـ حدد المسقط الأمامي للمستقيم MN الذي ينتمي للمستوي P المحـــدد بالمستقيمين المتوازيين AB و CD ، اذا كان مسقطه الأفقي mn معلوما .

**الحـــل :**

آ ـ نرسم معطيات السـؤال في التعبير الاسقاطي المستــوي الثنائي .

ب ـ بما أن المستقيم MN ينتمي للمستوي المحـــــدد بالمستقيمين المتوازيين AB و CD فانه اما يوازيهمـــا أو يقطعهما . ويتضح من المساقط الأفقية ( الشكل ١٠٤) أن المستقيم MN يتقاطع مع المستقيمين AB و CD . لهذا تمثـــل نقطتا تقاطع mn مع ab و cd ، وهما k و l على التـــوالي ، المستقطين الأفقيين لنقطتي تقاطع المستقيم MN مع المستقيمين AB و CD .



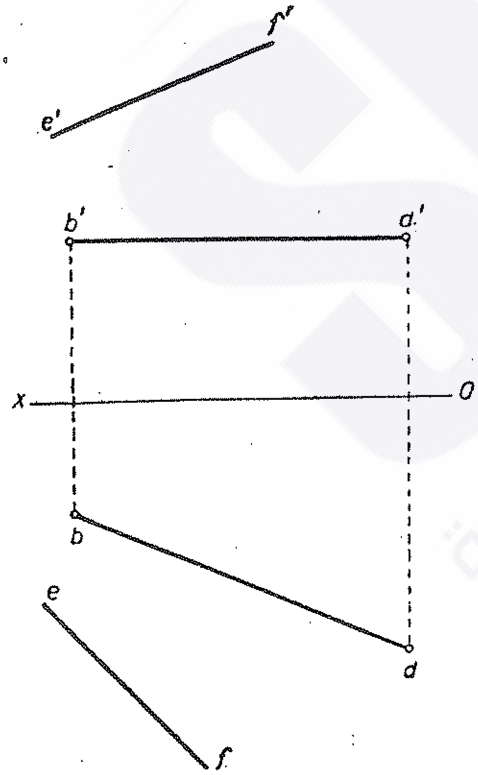

شكل رقم (١٠٤)

٥٦ـ ارسم مثلث متساوي الأضلاع ABC قاعدته BC واقعة على المستقيم MN ورأسه A على المستقيم EF والنقطة K قاعدة ارتفاعه AK ( الشكل ١٠٢ ) .

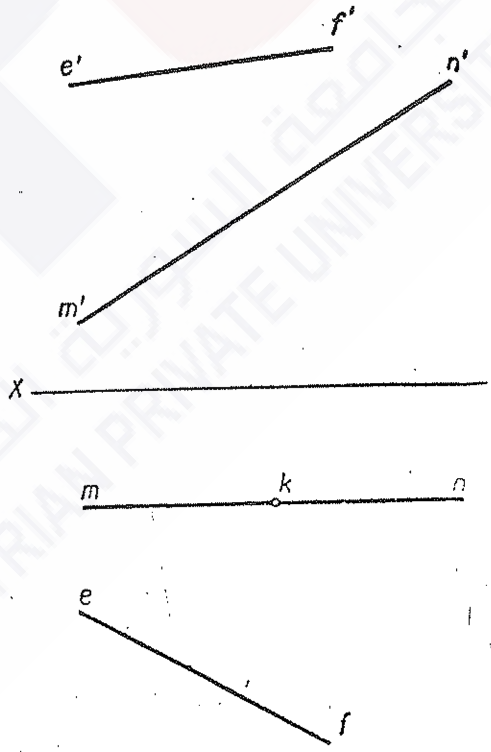
٥٧ـ ارسم معينا ABCD يقع قطره الكبير BD على المستقيم MN ورأسه A على المستقيم EF وتمثل النقطة K نقطة تقاطع القطرين والنسبة بينهما تساوي (٢) ( الشكل ١٠٢) .

٥٨ـ ارسم معينا ABCD يقع رأسه A على المستقيم EF ( الشكل ١٠٣) .

٥٩ـ ارسم الشكل الرباعي شبه المنحرف قائم الزاوية ABCD الذي يقع ضلعه الكبير BC على المستقيم BM ، واذا كان AD = AB وزاوية الرأس B تساوي 90° و CD = 1,2 AB ( الشكل ٩٥ ) .



شكل رقم (١٠٣)



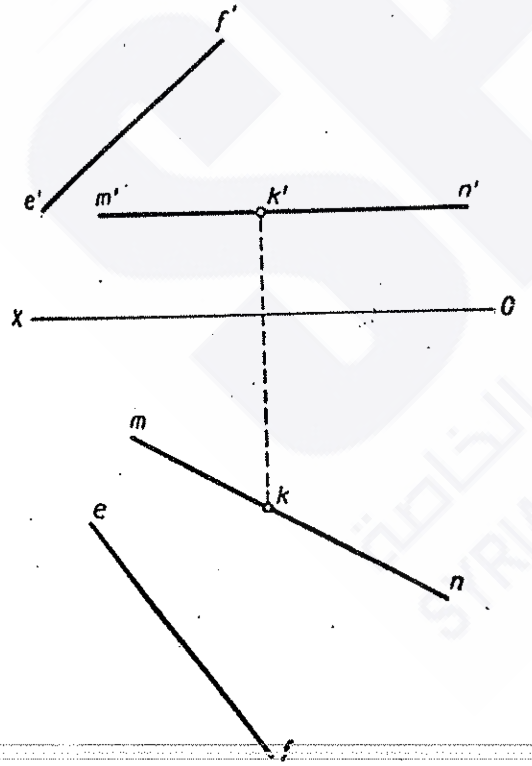
شكل رقم (١٠٢)

٥٢ـ ارسم مربعا ABCD يقع ضلعه BC على المستقيم BM ورأسه A على المستقيم EF ( الشكل ٩٩ ) .

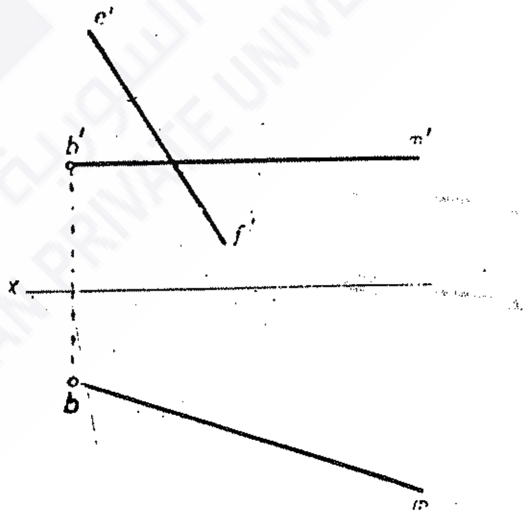
٥٣ـ ارسم المربع ABCD الذي يقع قطره BD على المستقيم MN ورأسه A على المستقيم EF وتمثل نقطة K نقطة تقاطع قطري المربع (الشكل ٧٦).

٥٤ـ ارسم متوازي الأضلاع ABCD الذي يقع ضلعه BC على المستقيم BM وطوله (٦٠) ملم ويقع ارتفاعه AK على المستقيم EF وطول ضلعه الجانبي يساوي (٤٠) ملم ( الشكل ١٠٠) .

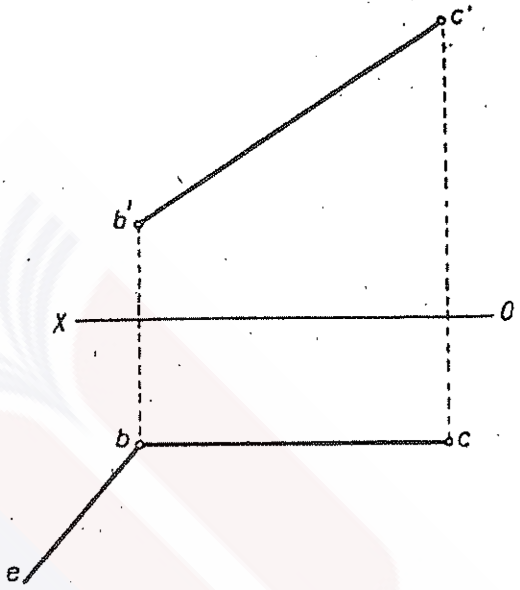
٥٥ـ ارسم متوازي الأضلاع ABCD الذي يقع ضلعه الكبير BC على المستقيم MN ورأسه A على المستقيم EF ويزيد طول ضلعه AB على ارتفاعه AK بمقدار (٥) ملم وطول ضلعه BC يساوي 1,5 AK ( الشكل ١٠١) .



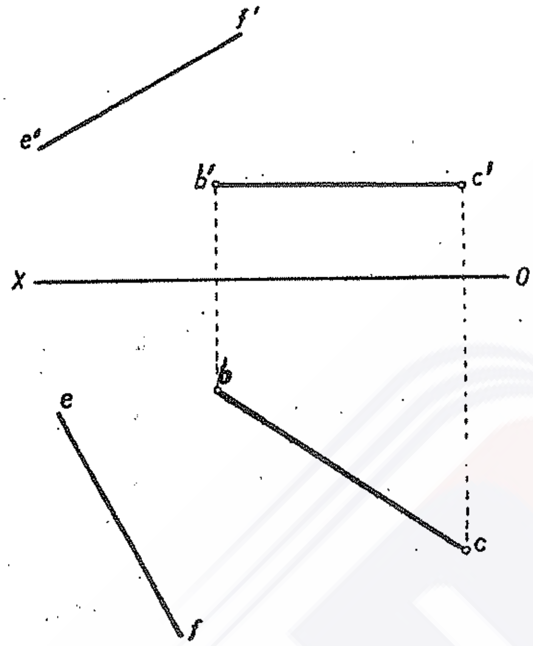

شكل رقم (١٠١)




شكل رقم (١٠٠)

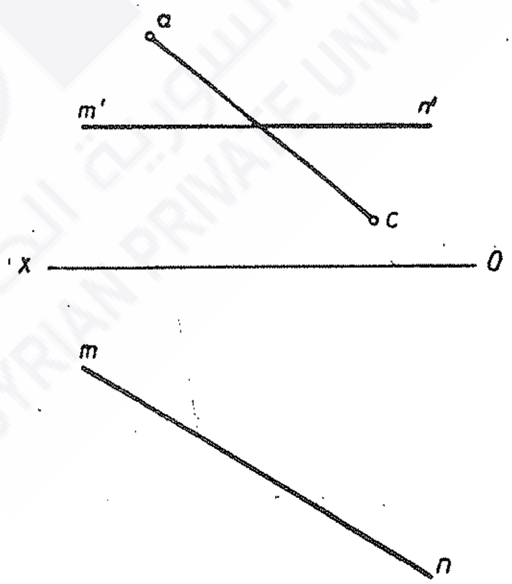



شكل رقم (٩٦)

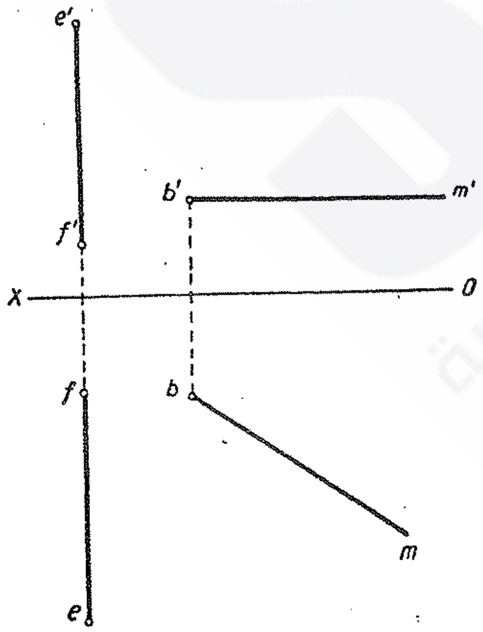



شكل رقم (٩٧)

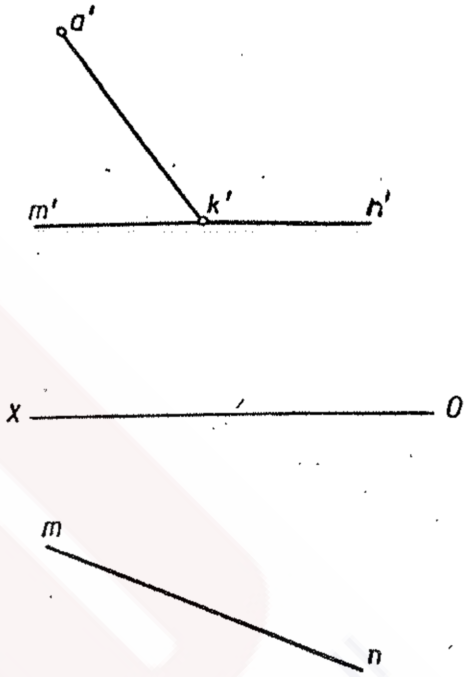
١٥ـ ارسم المربع ABCD الذي يقع قطره BD على المستقيم MN (الشكل ٩٨)٠



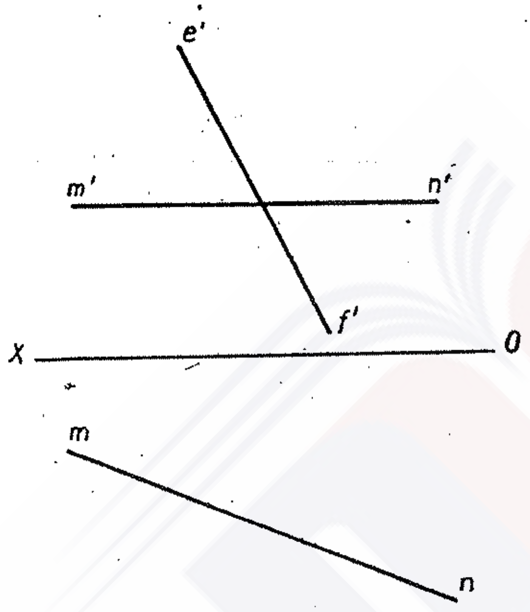

شكل رقم (٩٨)



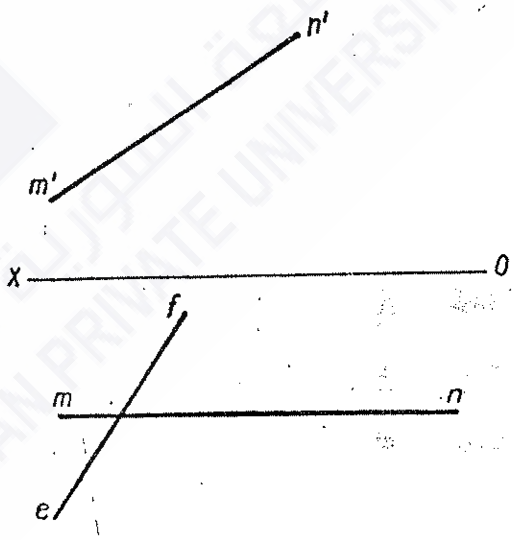

شكل رقم (٩٩)



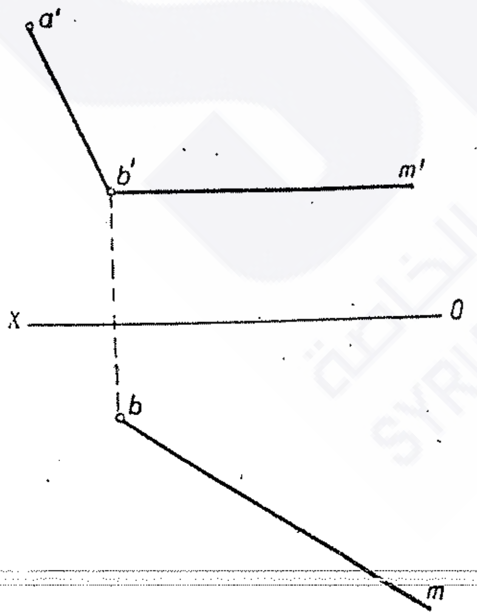
شكل رقم (٩٢)



شكل رقم (٩٣)



شكل رقم (٩٤)

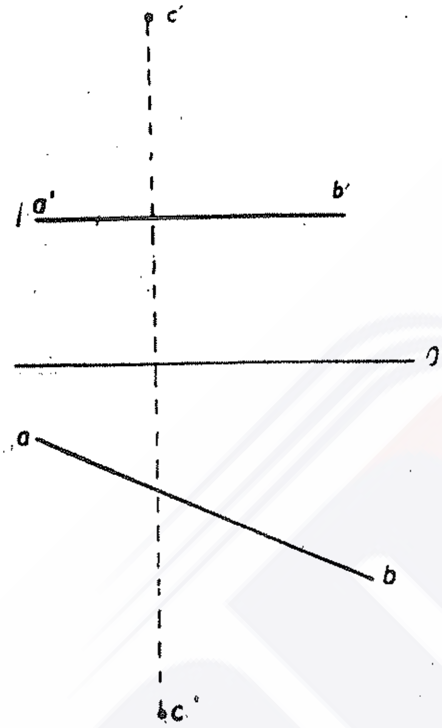


شكل رقم (٩٥)

المستقيم MN ( الشكل ٩٣ )
وارتفاع المثلث يساوي (٤٠) ملم .

٤٤ـ ارسم مثلثا متساوي الساقين ABC تقع قاعدته BC على المستقيم MN وطول ضلعه الجانبي أكبر من ارتفاعه بمقدار (١٠) ملم ( الشكل ٧٤ ) .

٤٥ـ ارسم مثلثا قائما متساوي الساقين ABC يقع ضلعه القائم BC على المستقيم BM وقمته على المستقيم EF ( الشكل ٨١ ) .



شكل رقم (٩١)

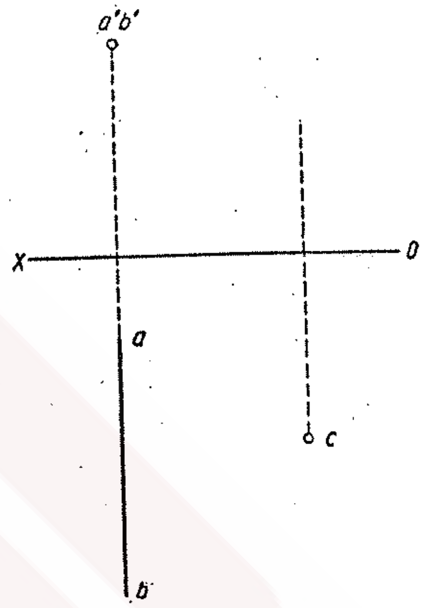
٤٦ـ ارسم مثلثا قائما ABC تقع قاعدته BC على المستقيم MN وضلعه القائم AB على المستقيم EF وطول هذا الضلع (٣٠) ملم ومساحة المثلث تساوي $0,75\ \overline{AB}^2$ ( الشكل ٩٤ ) .

٤٧ـ ارسم المستطيل ABCD الذي يقع ضلعه الكبير BC على المستقيم MN ومساحته تساوي $1,5\ \overline{AB}^2$ ( الشكل ٧٩ ) .

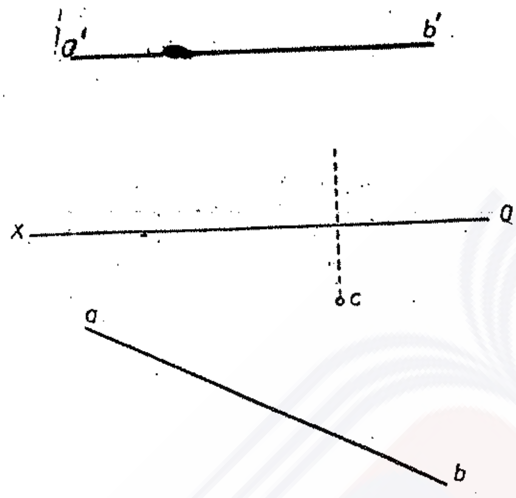
٤٨ـ ارسم المستطيل ABCD الذي يقع ضلعه الكبير BC على المستقيم BM . والنسبة بين طول ضلعيه تساوي (٢) ( الشكل ٩٥ ) .

٤٩ـ ارسم المربع ABCD الذي يقع رأسه A على المستقيم BE ( الشكل ٩٦ ).

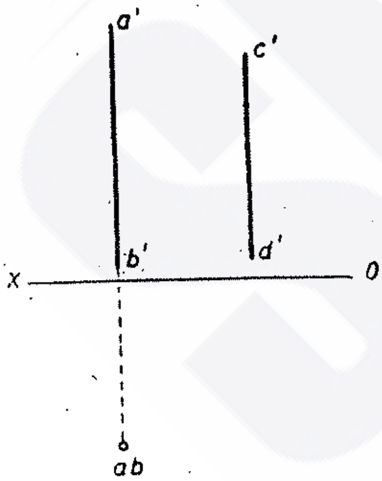
٥٠ـ ارسم المستطيل ABCD الذي يقع أحد رؤوسه A على المستقيم EF ( الشكل ٩٧ ) واحسب مساحته .




شكل رقم (٨٨)




شكل رقم (٨٩)



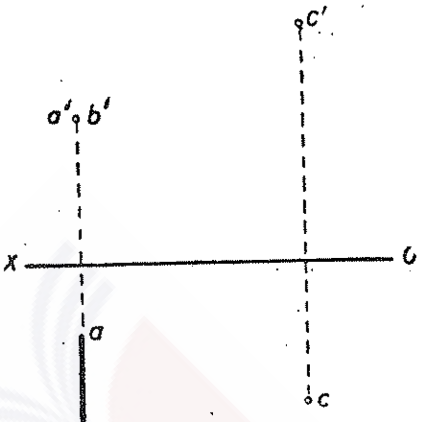

شكل رقم (٩٠)

٤٠ـ استكمل مساقط المستقيم CD الموازي للمستقيم AB اذا كانت المسافة بينهما (٢٠) ملم ( الشكل ٩٠) ماهي الحالات الممكنة .

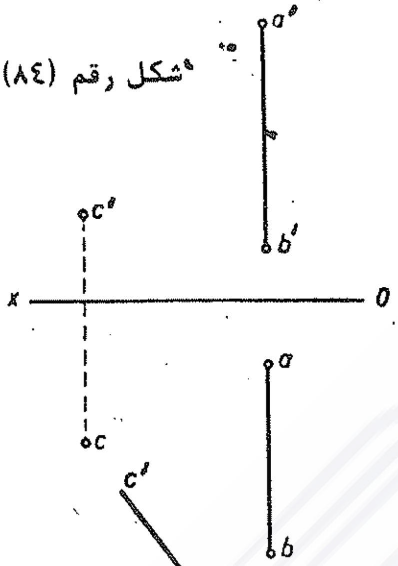
٤١ـ حدد على المستقيم AB نقطة تبعد عن النقطة C مسافة ( ٤٠ ) ملم ( الشكل ٩١) . ماهي الحالات الممكنة ؟

٤٢ـ ارسم مثلثا متساوي الأضلاع ABC تقع قاعدته BC على المستقيم MN والنقطة K قاعدة ارتفاعه AK ( الشكل ٩٢ ) .

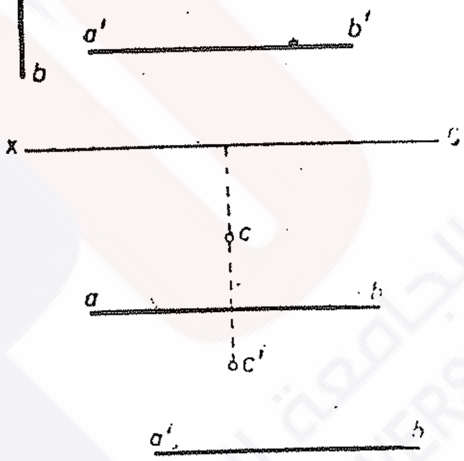
٤٣ـ ارسم مثلثا متساوي الساقين ABC تقع قاعدته BC على المستقيم MN وطولها (٦٠) ملم وتقع قمته على المستقيم EF الذي يعامد



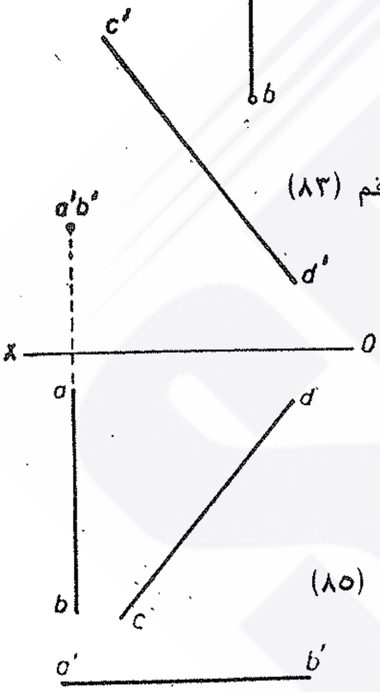
شكل رقم (٨٢)



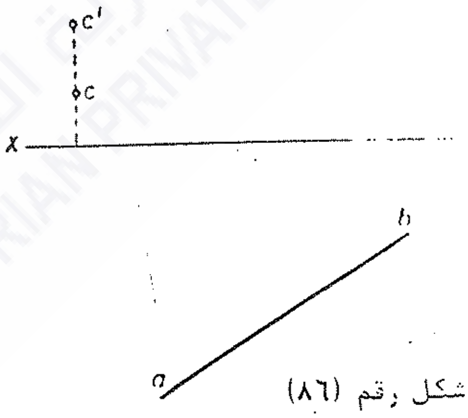
شكل رقم (٨٤)



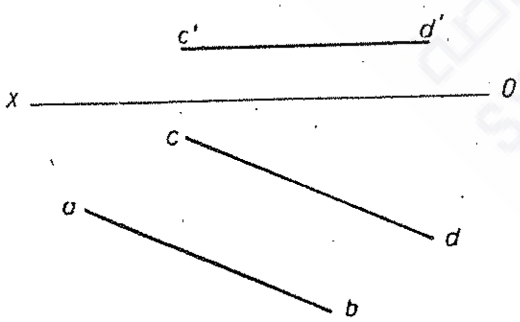
شكل رقم (٨٣)



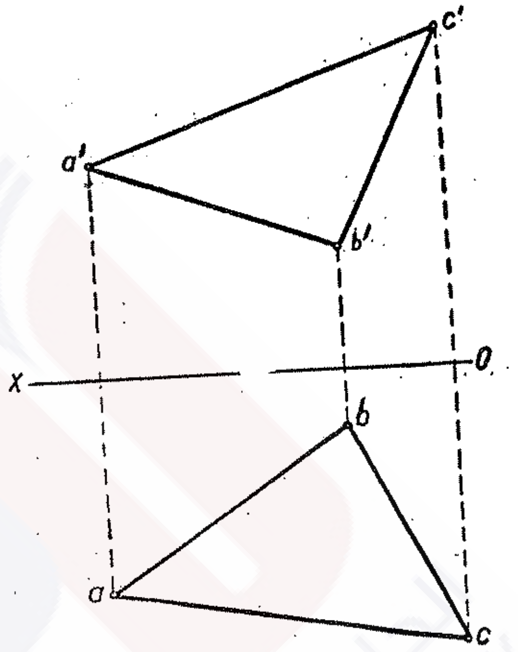
شكل رقم (٨٥)



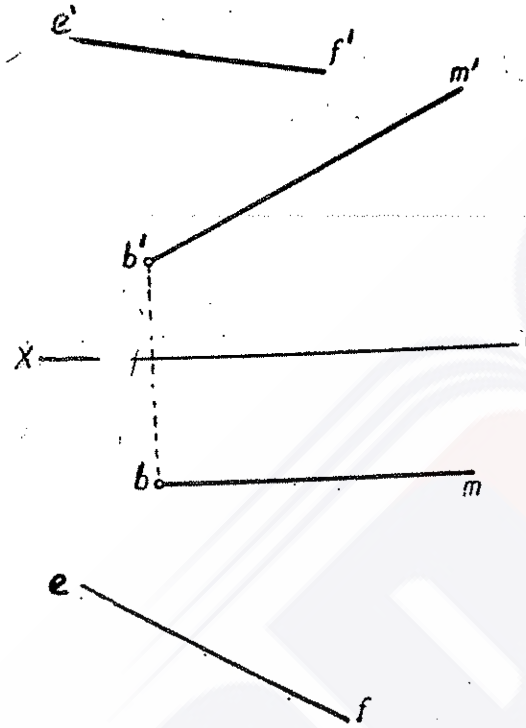
شكل رقم (٨٦)



شكل رقم (٨٧)




شكل رقم (٨٠)




شكل رقم (٨١)

٣٣ـ حدد مركز مساحة سطح المثلث ABC ( الشكل ٨٠ ) .

٣٤ـ ارسم مستطيلا ABCD يقع ضلعه الكبير BC على المستقيم BM ورأسه A على المستقيم EF وطول قطره يساوي 2 AB ( الشكل ٨١ ) .

٣٥ـ مرر من النقطة C مستقيما يتعامد مع المستقيم AB ويقطعـه ( الأشكال ٨٢ ـ ٨٤ ) .

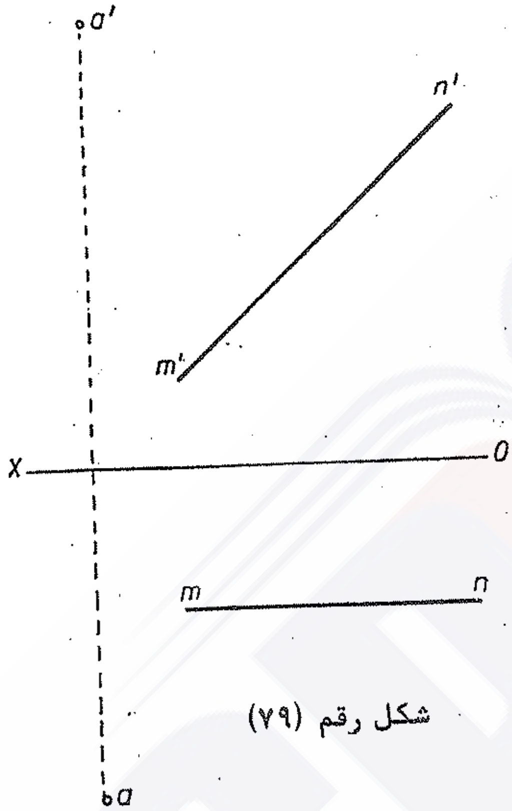
٣٦ـ اقطع المستقيمين AB و CD بمستقيم يعامدهما ( الشكل ٨٥ ) .

٣٧ـ حدد المسافة بين النقطة C والمستقيم AB ( الشكل ٨٦ ) .

٣٨ـ حدد المسافة بين المستقيمين المتوازيين AB و CD ( الشكل ٨٧ )

٣٩ـ حدد المسقط الناقص للنقطة C اذا كانت المسافة بينها وبين المستقيم AB تساوي (٣٠) ملم (الشكلان ٨٨ و٨٩) ماهي الحالات الممكنة ؟

٢٩ ارسم المعين ABCD ( الشكلان ٧٣ و ٧٩ ) ، اذا كان :



شكل رقم (٧٩)

آ ــ ضلعه BC واقعا على MN وطول ضلعه يساوي (٢ر١) ارتفاعه .

ب ــ ضلعه BC واقعا على MN وزواياه الحادة تساوي 60° .

جـ ــ قطره الكبير BD واقعا على MN والنسبة بين قطريه تساوي (٢) .

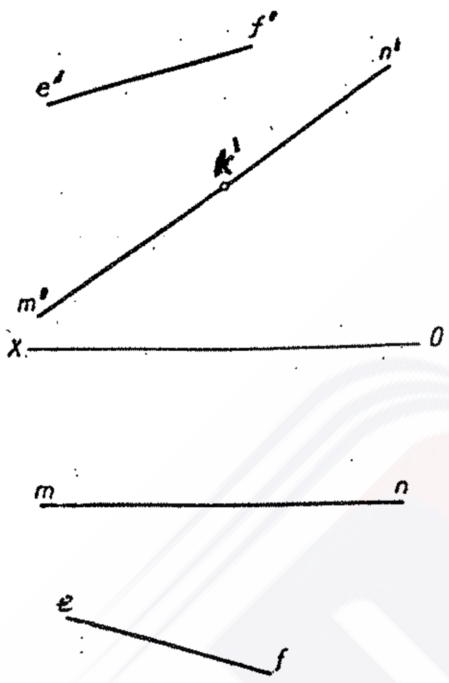
٣٠ــ ارسم متوازي الأضلاع ABCD الذي تقع قاعدته BC على المستقيم MN اذا كانت زاوية الرأس B الحادة تساوي 60° وطول قطره AC يزيد على طول ضلعه الجانبي بـ (٥) ملم ( الشكل ٧٣) .

٣١ــ ارسم متوازي الأضلاع الذي تقع قاعدته على المستقيم MN وطول ضلعه الجانبي يساوي (٢٥ر١) ارتفاعه والنسبة بين أضلاعه (٢) (الشكلان ٧٣ و ٧٩).

٣٢ــ ارسم شبه منحرف متساوي الضلعين ABCD تقع قاعدته الكبيرة BC على المستقيم MN ( الشكلان ٧٣ و ٧٩ ) ، اذا كان :

آ ــ AB = AD = DC = ٤٠ ملم .

ب ــ زاويتيه الحادتين متساويتان (B = C = 45°) والقاعدة الصغيرة تساوي ضلعه الجانبي .

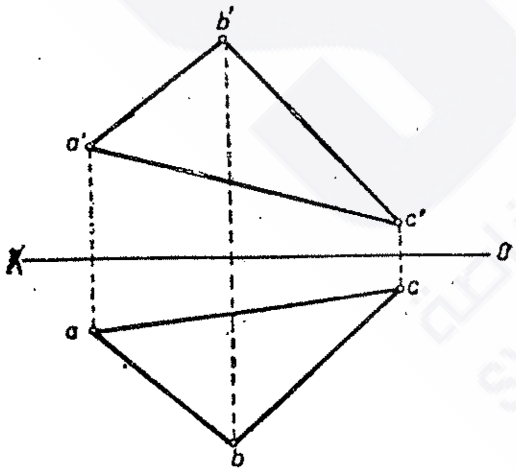


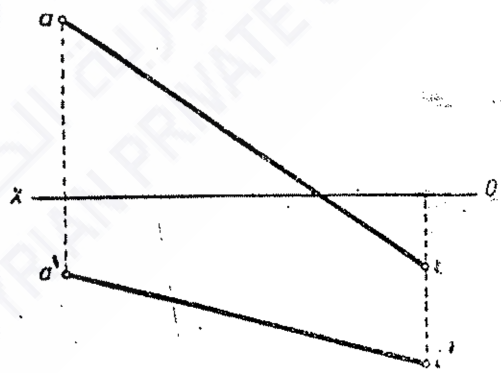

شكل رقم (٧٦)

٢٦ـ ارسم المثلث متســـــاوي الساقين ABC الذي تقـــع قاعدته BC على المستقيـــم MN وقمته A على المستقيم EF ( الشكل ٧٦) اذا كانـت النقطة K قاعدة الارتفاع AK وطول ضلعه الجانبي يســـاوي 1,15 ارتفاعه •

٢٧ـ حدد الطول الحقيقي لمقطـع المستقيم AB وميله بالنسبة لمستويي الاسقاط V و H الشكل ٧٧) •

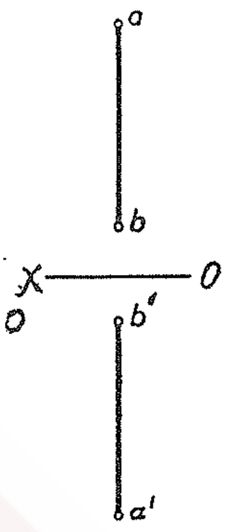
٢٨ـ حدد القياسات الحقيقية للمثلث ABC ( الشكل ٧٨ ) •



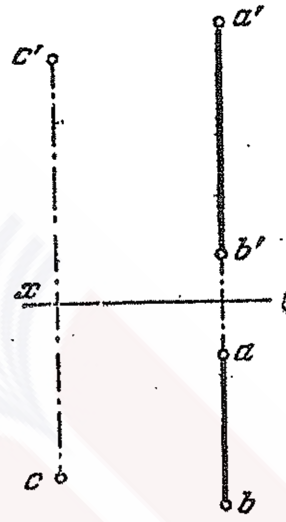




شكل رقم (٧٨)

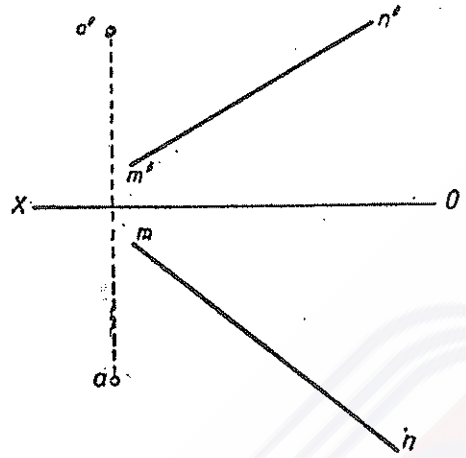
شكل رقم (٧٧)



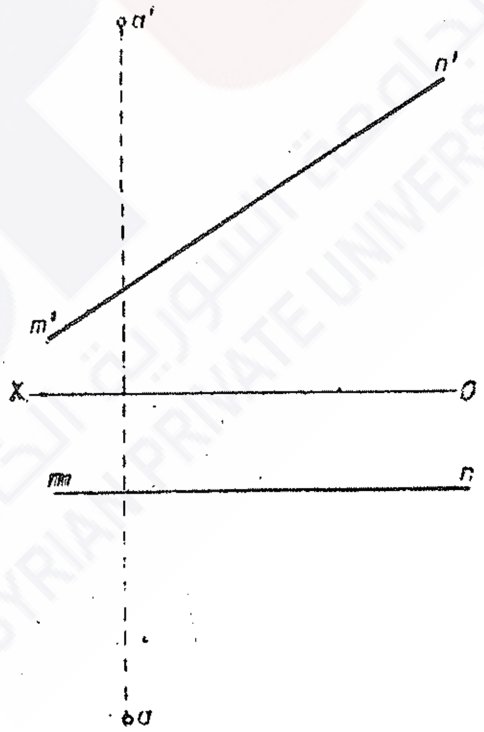

شكل رقم (٧١)



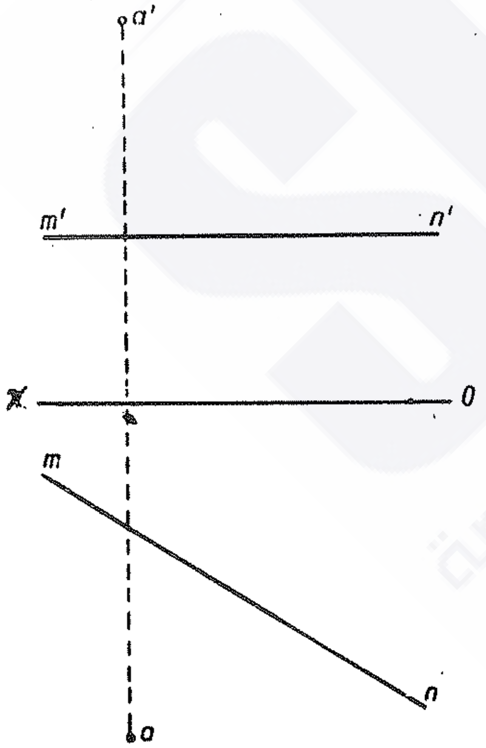

شكل رقم (٧٢)




شكل رقم (٧٣)




شكل رقم (٧٤)




شكل رقم (٧٥)

٢١ــ حدد نقطة على المستقيم AB تبعد مسافة (٣٠) ملم عن النقطـــــة C ( الشكل ٦٩) .

٢٢ــ ارسم من النقطة C مستقيمات تقطع المستقيم AB بزاوية حادة $\varphi$ :
آ ــ $\varphi = 30°$ ، ب ــ $\varphi = 45°$ ، جـ ــ $\varphi = 60°$ . ماهـــو عدد المستقيمات الممكن رسمها ؟ ( الشكلان ٦٩ و ٧٠ ) .

٢٣ــ حدد على المستقيم AB مقطعا AC طوله (٢٥) ملم باتجاه النقطـة B ( الشكل ٧١ ) .

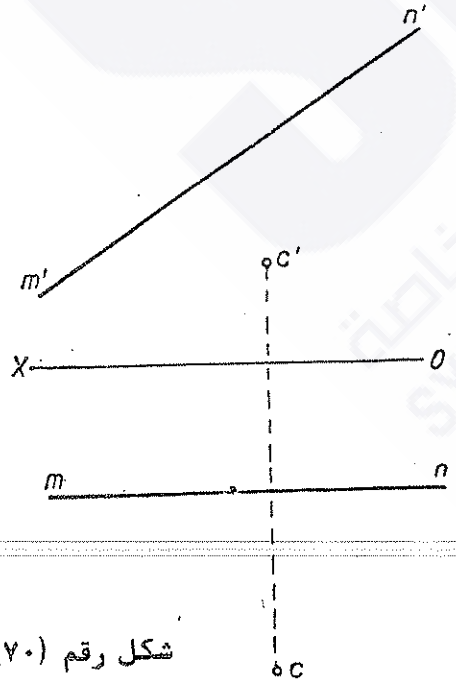
٢٤ــ مرر من النقطة C مستقيما بعامد المستقيم AB ( الشكل ٧٢) .

٢٥ ــ ارسم مثلثا متساوي الساقين ABC تقع قاعدته BC على المستقيـــــم MN ، اذا كان :

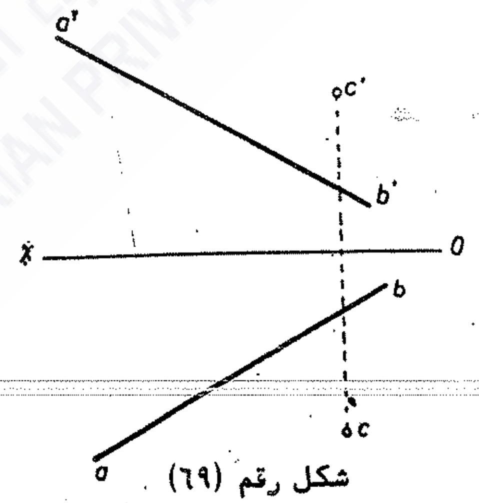
آ ــ طول ضلعه الجانبي يساوي 1,25 ارتفاعه ( الشكلان ٧٣ و ٧٤ ) .

ب ــ زاوية الرأس A تساوي 30° ( الشكلان ٧٣ و ٧٤ ) .

جـ ــ طول قاعدته يساوي 1,5 ارتفاعه ( الشكلان ٧٣ و ٧٥).




شكل رقم (٧٠)

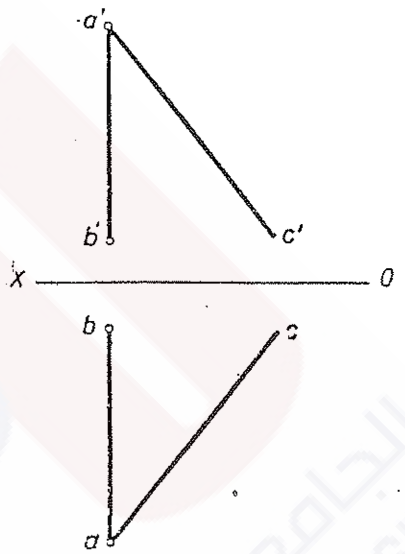



شكل رقم (٦٩)

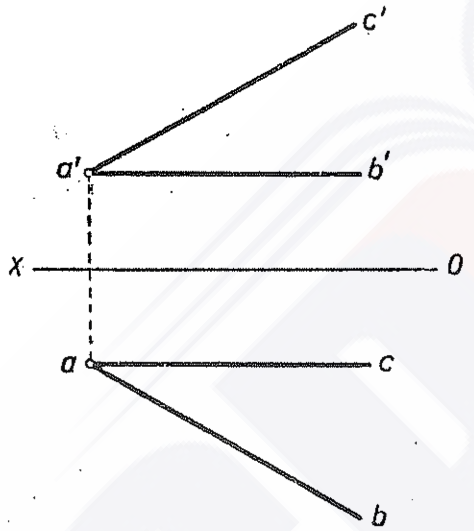
١٨ـ ارسم منصف الزاوية BAC ( الشكل ٦٥ و ٦٦ ) ٠

١٩ـ حدد المسافة بين المستقيمين المتوازيين AB و CD ( الشكل ٦٧ ) ٠

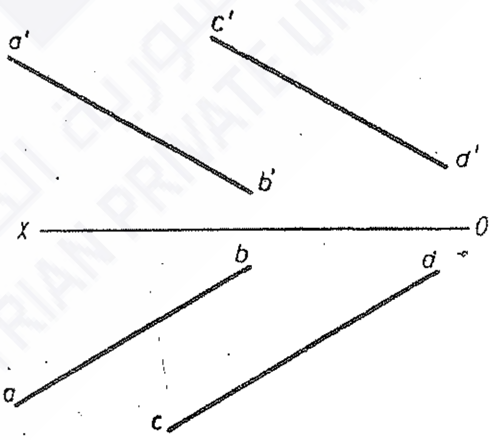
٢٠ـ ارسم من النقطة A مستقيما يعامد المستقيم BC وحدد طوله ( الشكل ٦٨ ) ٠



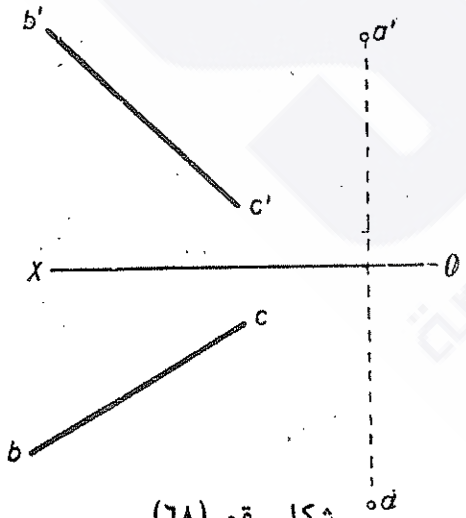

شكل رقم (٦٥)




شكل رقم (٦٦)




شكل رقم (٦٧)

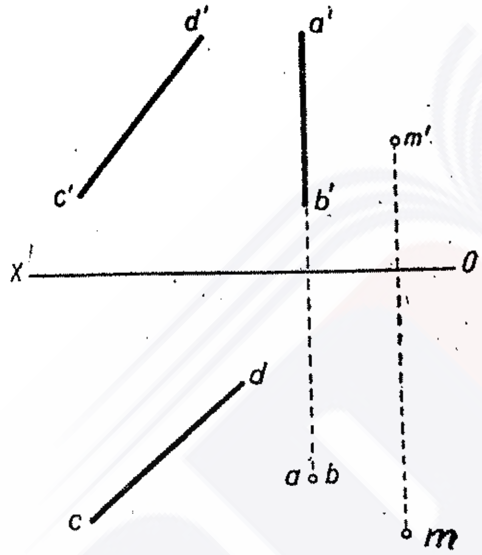



شكل رقم (٦٨)

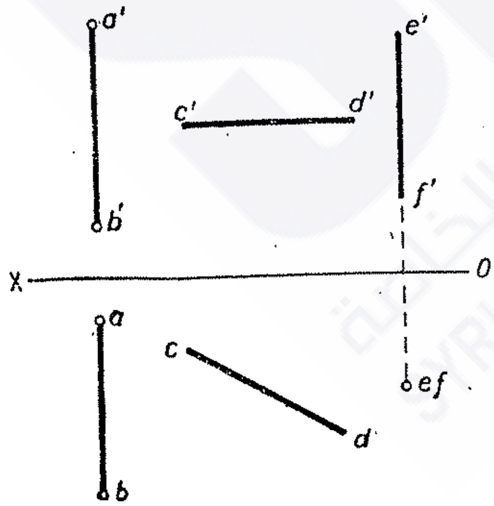
١٦ـ ارسم مستقيما يقطع المستقيمات AB و CD و EF بحيث يقطع المستقيم CD ( الشكل ٦٣ ) والمستقيم AB ( الشكل ٦٤ ) في نقطة تبعد عن مستوي الاسقاط الأفقي (١٥) ملم • يمكن استخدام التعبير الاسقاطي الثلاثي عند الضرورة •

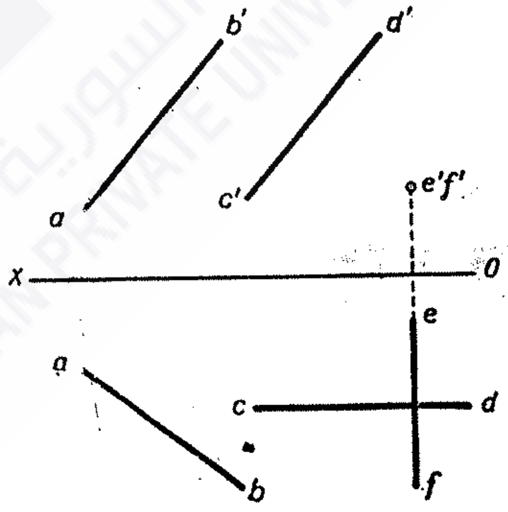
١٧ـ ارسم المثلث متساوي الساقين ABC ، حيث AB = AC وتقع قاعدته BC على المستقيم MN ورأسه A على المستقيم EF وارتفاعه AK واستكمل احداثيات النقطة K •

M(0,10,10 ) و N(70,25,10) و E(-10,50,25) و F(40,60,60) و K(35, ?, ? ) •




شكل رقم (٦٢)




شكل رقم (٦٤) شكل رقم (٦٣)

١٠- ارسم في التعبير الاسقاطي مستقيما أماميا يقطع المستقيمين A B و C D ( الشكل ٥٩ ) ٠

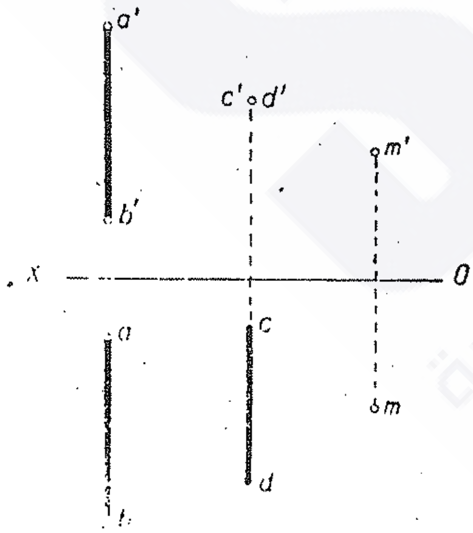
١١- ارسم من النقطة C(70,40,30) مستقيما أفقيا يقطع المستقيم المار من النقطتين A(10,45,40) و B(50,40,15) ٠

١٢- مرر من النقطة C(70,20,10) مستقيما أماميا يقطع المستقيم المار من النقطتين A(10,10,5) و B(40,30,50) ٠

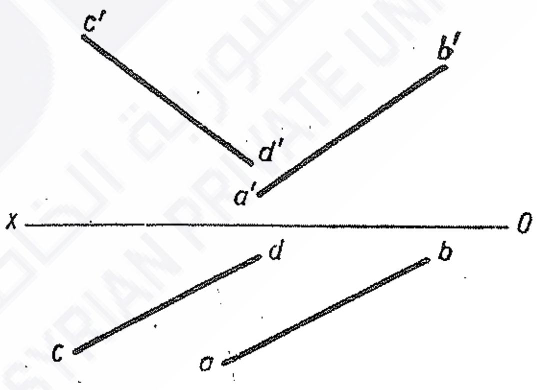
١٣- مرر من النقطة C(60,30,40) مستقيما يقطع المستقيم المار من النقطتين A(10,45,35) و B(50,10,15) ويقطع محور الاحداثيات OY ٠ حدد بعد نقطة تقاطعه مع محور OY عن مستوي الاسقاط الأمامي ٠

١٤- ارسم في التعبير الاسقاطي مستقيما أفقيا يقطع المستقيمين A B و C D ( الشكل ٦٠ ) ويبعد عن مستوي الاسقاط الأفقي (١٥) ملم ٠

١٥- مرر من النقطة M مستقيما يقطع المستقيمين AB و CD ( الشكلان ٦١ و ٦٢ ) ٠




شكل رقم (٦١)




شكل رقم (٦٠)

٥ـ ارسم من النقطة C مستقيما أفقيا يقطع المستقيم AB ( الشكل ٥٦) .

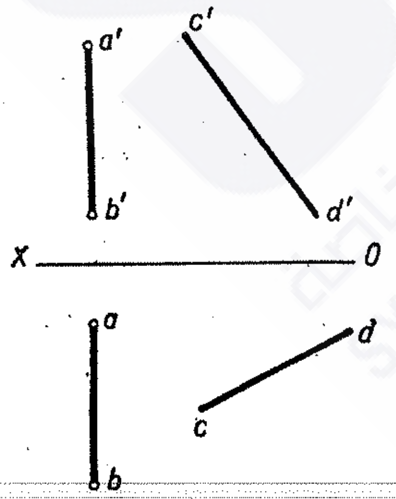
٦ـ حدد النقطة C التي تقسم المستقيم AB من النقطة A نحو B وفق النسبة $M = \frac{2}{3}$ ( الشكل ٥٧) .

٧ـ ماهو طول مقطع المستقيم المحدد بالنقطتين A(90,20,25) و B(30,80,70) وماهي زوايا ميله على مستويات الاسقاط ؟

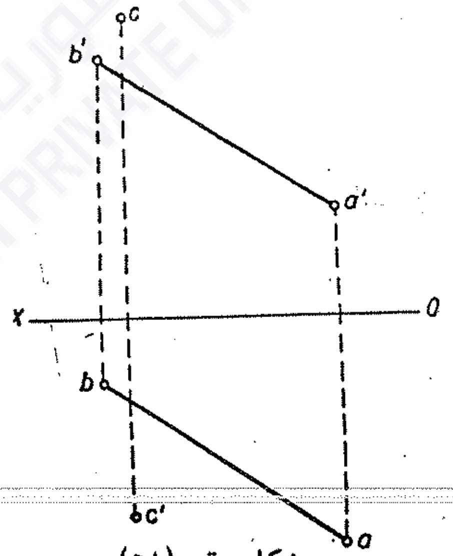
عبر عن ذلك في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي .

٨ـ ارسم المساقط الهندسية لمقطع المستقيم المحدد بالنقطتين A(10,70,60) و B(70,10,15) وعين طوله الحقيقي وزوايا ميله على مستويات الاسقاط وحدد عليه النقطة M التي تحقق احداثياتها العلاقة: آ ـ $Z = 1,5\ X$ ، ب ـ $Z = 1,5\ y$ والنقطة N التي تحقق احداثياتها العلاقة : آ ـ $Z = X$ ، ب ـ $Z = Y$ .

٩ـ مرر من النقطة C مستقيما يقطع مقطع المستقيم AB في نقطة تقسمه وفق النسبة $M = \frac{1}{3}$ ( الشكل ٥٨) .

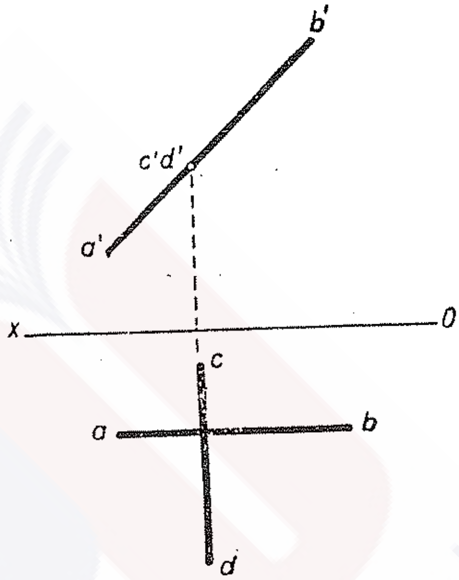



شكل رقم (٥٩).

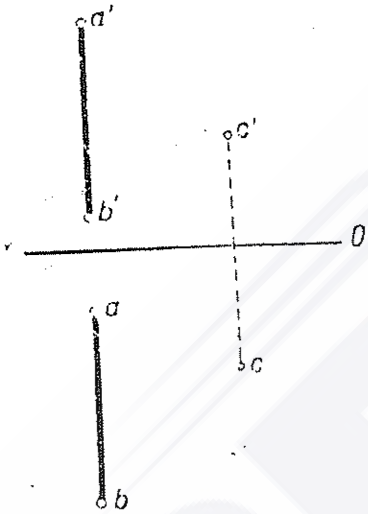



شكل رقم (٥٨)

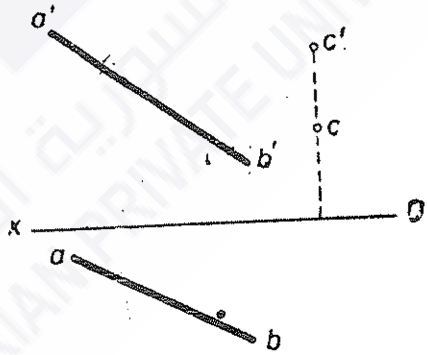
٤ـ ارسم من النقطة C مستقيما أماميا يقطع المستقيم AB ( الشكل ٥٥) .



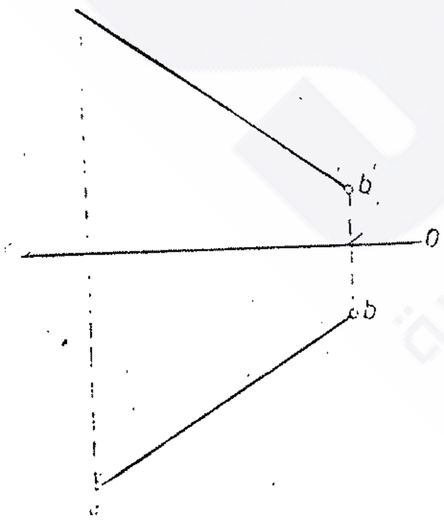

شكل رقم (٥٤)




شكل رقم (٥٥)




شكل رقم (٥٦)




شكل رقم (٥٧)

| III | | | | II | | | | I | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| D | C | B | A | D | C | B | A | D | C | B | A | |
| 45 | 15 | 10 | 30 | 100 | 50 | 110 | 40 | 120 | 40 | 100 | 5 | X |
| 35 | 5 | 45 | 15 | 30 | 20 | 5 | 40 | 40 | 10 | 20 | 65 | Y |
| 30 | 20 | 10 | 35 | 50 | 10 | 10 | 30 | 10 | 40 | 60 | 15 | Z |

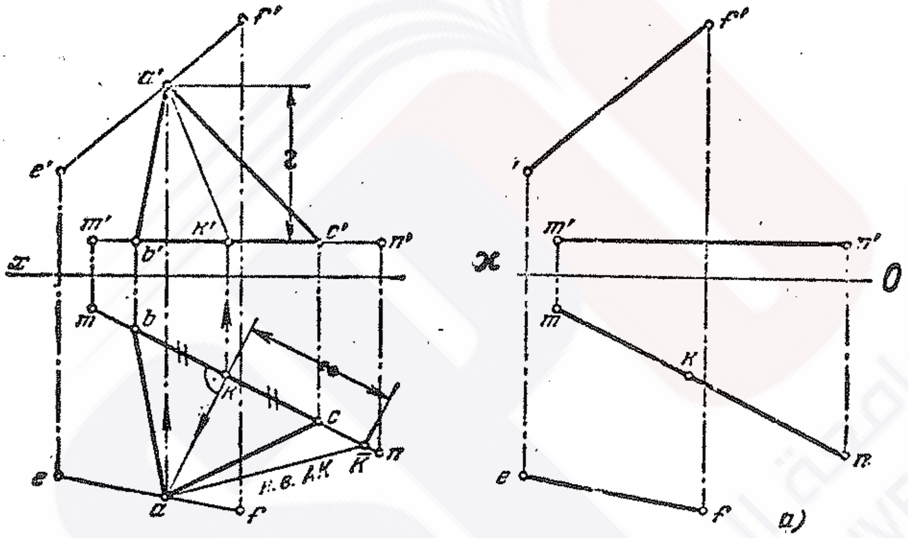
| VI | | | | V | | | | IV | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 20 | 70 | 10 | 25 | 80 | 25 | 80 | 10 | 60 | 15 | 40 | X |
| 15 | 25 | 35 | 5 | 55 | 0 | 55 | 0 | 10 | 60 | 45 | 20 | Y |
| 30 | 10 | 10 | 30 | 40 | 0 | 15 | 15 | 10 | 35 | 5 | 30 | Z |

| IX | | | | VIII | | | | VII | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 35 | 10 | 35 | 110 | 40 | 30 | 100 | 70 | 30 | 60 | 20 | X |
| 25 | 55 | 45 | 10 | 60 | 40 | 20 | 40 | 30 | 20 | 20 | 10 | Y |
| 50 | 90 | 20 | 60 | 90 | 20 | 50 | 120 | 20 | 50 | 10 | 40 | Z |

| XII | | | | XI | | | | X | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 20 | 10 | 10 | 70 | 40 | 40 | 5 | 50 | 50 | 10 | 40 | X |
| 40 | 10 | 10 | 40 | 30 | 5 | 30 | 10 | 40 | 10 | 15 | 30 | Y |
| 45 | 10 | 40 | 10 | 40 | 15 | 5 | 30 | 10 | 40 | 5 | 45 | Z |

٦- ارسم المستقيم الأفقي MN الذي يبعد عن المستوي الأفقي H مسافة 40 ملم ويتقاطع مع المستقيمين AB و CD ( الحالة IX ) .

١٦ـ ارسم مثلثا متساوي الساقين ABC تقع قاعدته BC على المستقيم MN ويقع رأسه A على المستقيم EF ( الشكل ٤٨ آ ) ويتساوى طول قاعدته BC وارتفاعه AK ومحدد لنا المسقط الأفقي k للنقطة K قاعدة ارتفاع المثلث ٠




ب شكل رقم (٤٨) آ

**الحـــل :**

١ـ نحدد ، حسب قواعد الاسقاط العامة ، المسقط الأمامي 'k للنقطة K بكونها احدى نقاط المستقيم BC ( بتعبير آخر احدى نقاط المستقيـ MN ) ، الشكل (٤٨ ب ) ٠

٢ـ ارتفاع المثلث AK يعامد قاعدته BC وهذا يعني أنه يعامد MN ولذلك ، حسب قاعدة اسقاط الزاوية القائمة التي أحد أضلاعها يوازي مستوي الاسقاط ، يكون المسقط الأفقي للزاوية المحصورة بين

المستقيمين AK و MN وهو مستقيم أفقي ، زاوية قائمة أيضا • على هذا الأساس نقيم من k عمودا على mn فيقطع ef في النقطة a المسقط الأفقي لنقطتي الرأس A • نحدد بعد ذلك ، حسب قواعد الاسقاط ، المسقط الأمامي a' على أساس أن النقطة A منتمية للمستقيم EF •

٣- نحدد الطول الحقيقي للارتفاع AK فنأخذ على kn باعتباره الضلع القائم الثاني للمثلث قائم الزاوية مقطعا يساوي القيمة المطلقة لفرق احداثيات a'k' ($\triangle Z$) فنحصل على النقطة $\bar{K}$ • نصل $a\bar{K}$ فنحصل على وتر المثلث قائم الزاوية الذي يساوي طوله الطول الحقيقي للارتفاع AK ( الشكل ٤٨ ب ) •

٤- نأخذ على mn من النقطة k وعلى جهتيها مقطعين يساوي كل منهما $\frac{1}{2}\, a\bar{K}$ فنحدد النقطتين b و c المسقطين الأفقيين لرأس المثلث B و C على التوالي •

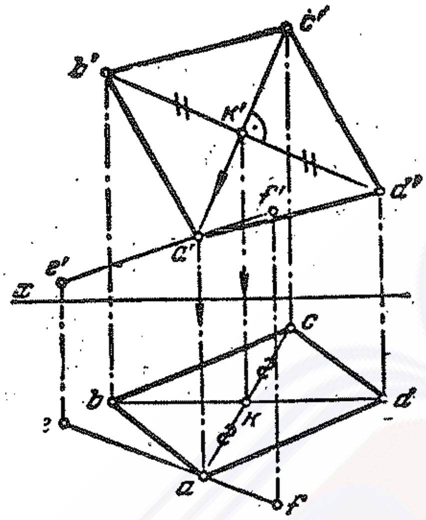
٥- نحدد المسقطين الأماميين b' و c' لهذين الرأسين باعتبارهما نقطتين منتميتين للمستقيم MN •

٦- نصل النقاط a و b و c فنحصل على المسقط الأفقي abc للمثلث متساوي الساقين ABC •

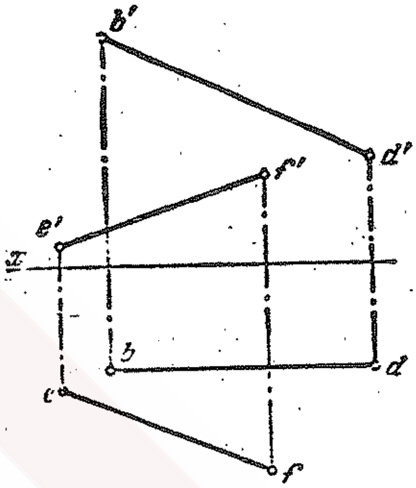
٧- نصل النقاط a' و b' و c' فنحصل على المسقط الأمامي a'b'c' للمثلث متساوي الساقين ABC • وهو المطلوب •

## ثانيا ـ تمارين تطبيقية :

١- حدد العلاقة الفراغية بين المستقيمين AB و CD من خلال التعبير الاسقاطي المستوي الملائم •



ب



آ

شكل رقم (٤٧) ٠

المستقيم BD الأمامي b'd' والأفقي ab في نقطة K(k,k') ( الشكل ٤٧ ب ) .

٢- نلاحظ من معطيات السؤال ( الشكل ٤٨ آ ) أن المستقيم BD أمامي وهذا يعني ، حسب قاعدة اسقاط الزاوية القائمة التي أحد أضلاعها يوازي مستوي الاسقاط ، أن المسقط الأمامي للزاوية المحصورة بين قطري المعين يكون زاوية قائمة أيضا ولذلك نقيم من k' عمودا على b'd' يقطع المستقيم e'f' في نقطة a' المسقط الأمامي للرأس A . نمد المستقيم a'k' ونحدد عليه مقطعا k'c' يساوي المقطع a'k' فنحصل على c' المسقط الأمامي للرأس C نصل الرؤوس a'b'c'd' فنحصل على المسقط الأمامي للمعين المطلوب ( الشكل ٤٧ ب ) .

٣- نحدد ، حسب قواعد الاسقاط العامة ، المساقط الأفقية لرؤوس المعين ونصل بينها فنحصل على المسقط الأفقي abcd للمعين ABCD .

ولهذا نرسم من النقطة a مستقيما يوازي bc ومن النقطة c نرسم مستقيما يوازي ab فنحصل من تقاطعهما على النقطة d المسقط الأفقي للرأس D • المستقيمان ad و cd يمثلان المسقطين الأفقيين للضلعين AD و CD على التوالي •

حـ ـ تحديد المسقط الأمامي 'd للنقطة D يتم باحدى الطريقتين التاليتين:

١ـ بالطريقة ذاتها التي اتبعناها لتحديد المسقط الأفقي d ، فنرسم من 'a مستقيما يوازي 'b'c ومن 'c مستقيما يوازي 'a'b فنحصل من تقاطعهما على 'd ويمثل المستقيمان 'a'd و 'c'd المسقطين الأماميين للضلعين AD و CD على التوالي • ويمكن التأكد من صحة الحل استنادا الى قواعد الاسقاط العامة والتي تنص على أن المسقطين الأمامي والأفقي لأية نقطة يقعان على خط تداع واحد يعامد خط الأرض •

١ـ نقيم من d خط تداع يعامد خط الأرض ونرسم من 'a ( أو 'c ) مستقيما يوازي 'b'c ( أو 'a'b ) فيتقاطعان في النقطة 'd المسقط الأمامي للرأس D • التحقق من صحة الحل يتم من خلال التأكد من أن المستقيم 'd'c ( أو 'd'a ) يوازي المستقيم 'a'b ( أو 'b'c ) فاذا كانا متوازيين فالحل صحيح •

١٥ـ ارسم معينا AB CD يقع رأسه A على المستقيم EF ( الشكل ٤٧ آ ) ويمثل مقطع المستقيم BD أحد أقطاره •

## الحـل :

١ـ يكون قطرا المعين متعامدين وينصف أحدهما الآخر في نقطة تقاطعهما • لذلك ( حسب قاعدة تقسيم مستقيم بنسبة معينة ) ننصف مسقطي مقطع

من تقاطع mn وخط التداعي النازل من 'b .

جـ ـ من الاحداثيات المعلومة نحدد المسقط الأمامي 'a للنقطة A . نصل 'a'b فنحصل على المسقط الأمامي للضلع AB .

د ـ حسب قاعدة اسقاط الزاوية القائمة ، يتعامد المسقطان الأفقيان للضلعين BC و AB لأن الضلع BC يوازي مستوي الأسقاط الأفقي (يقع على المستقيم الأفقي MN ). لذلك نقيم من النقطة b عمودا على mn . نقطة تقاطع هذا العمود مع خط التداعي النازل من 'a والعمودي على خط الأرض تحدد المسقط الأفقي a للنقطة A ويمثل المستقيم ab المسقط الأفقي للضلع AB .

هـ ـ نحدد الآن الطول الحقيقي للضلع AB مستخدمين طريقة المثلث قائم الزاوية ( الشكل ٤٦) فيكون وتر المثلث aB مساويا للطول الحقيقي للضلع AB .

و ـ بما أن الضلع BC يوازي مستوي الاسقاط الأفقي H فان مسقطه الأفقي يمثل طوله الحقيقي ولذلك نأخذ من النقطة b على امتداد mn مقطعا طوله 1,5 ab ( الذي يساوي 1,5 AB ) فنحصل على المسقط الأفقي c للرأس C . نحدد وفق قواعد الاسقاط العامة مسقطه الأمامي 'c على المستقيم 'm'n .

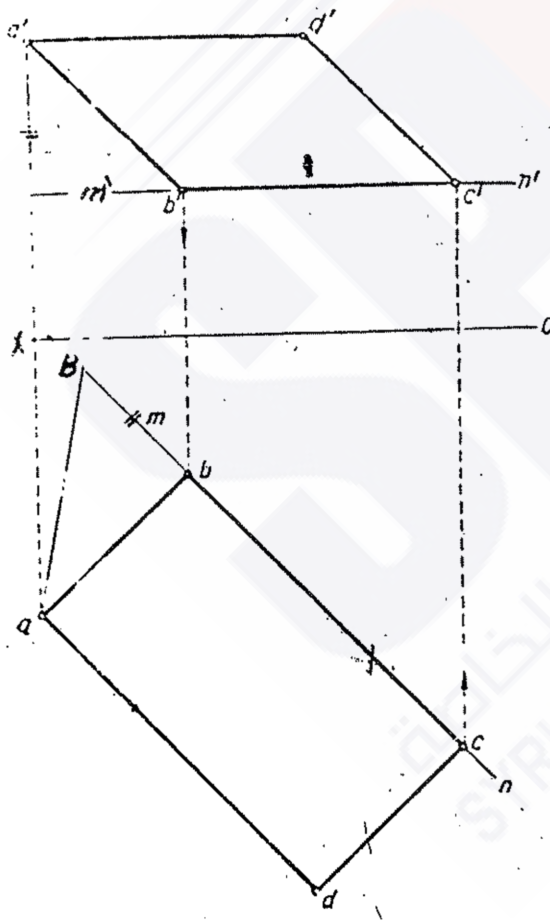
ز ـ لاستكمال رسم مسقطي المستطيل AB CD يجب معرفة مسقطي النقطة D . تحديد هذين المسقطين يتم بالاستناد الى قاعدة اسقاط المستقيمات المتوازية والتي تنص على أن المساقط المتماثلة للمستقيمات المتوازية تكون متوازية أيضا . لذلك وبما أن الضلعين AD و CD يوزايان الضلعين BC و AB على التوالي فان مساقطها المتماثلة تتوازى أيضا .

فنحدد النقطة K المستقيم cK يمثل وتر المثلث قائم الزاوية وهذا يعني أنه يعبر عن الطول الحقيقي لمقطع العمود CK • وهو المطلوب •

١٤ـ ارسم مسقطي المستطيل AB CD في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي اذا كانت قاعدته BC واقعة على المستقيم الأفقي MN وطولها يساوي 1,5 AB واذا كانت معلومة لدينا احداثيات النقطتين المحددتين للمستقيم MN وهي M(90,15,35) و N(10,100,35) وبعض احداثيات النقطتين المحددتين للضلع AB العمودي على BC وهي :

( 35 , ؟ , 75)B و ( 75 , ؟ , 115) •

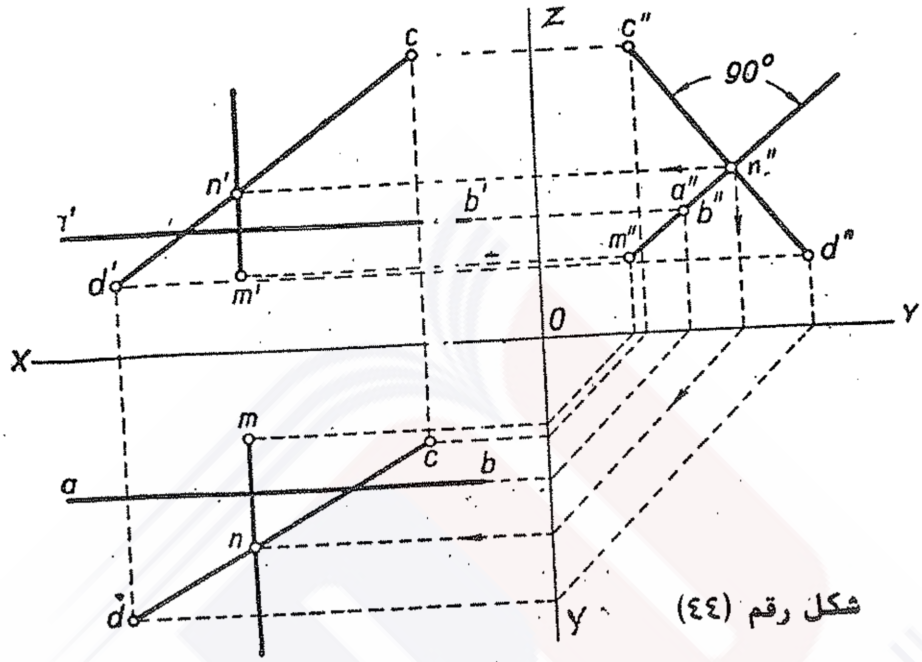
**الحل :**




شكل رقم (٤٦)

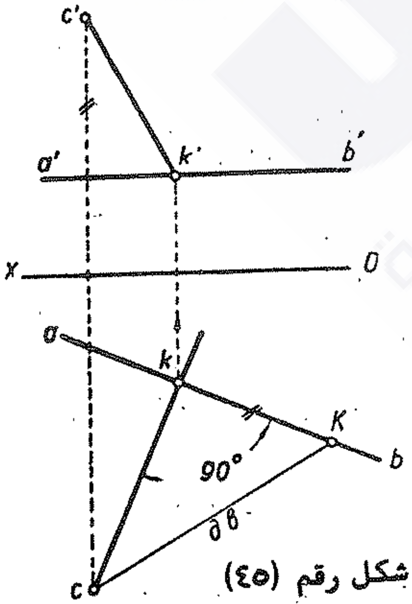
آ ـ نرسم مسقطي المستقيم MN الأفقي mn والأمامي m'n' •

ب ـ من الاحداثيات المعلومة نحدد المسقط الأمامي b' للنقطة B وبما أنها تقع على المستقيم MN فان مسقطها الأفقي b يقع على المسقط الأفقي mn للمستقيم MN وفي الوقت ذاته يقع على خط تداع واحد يعامد خط الأرض (OX) مع المسقط الأمامي b' • لذلك المسقط الأفقي b يحدد

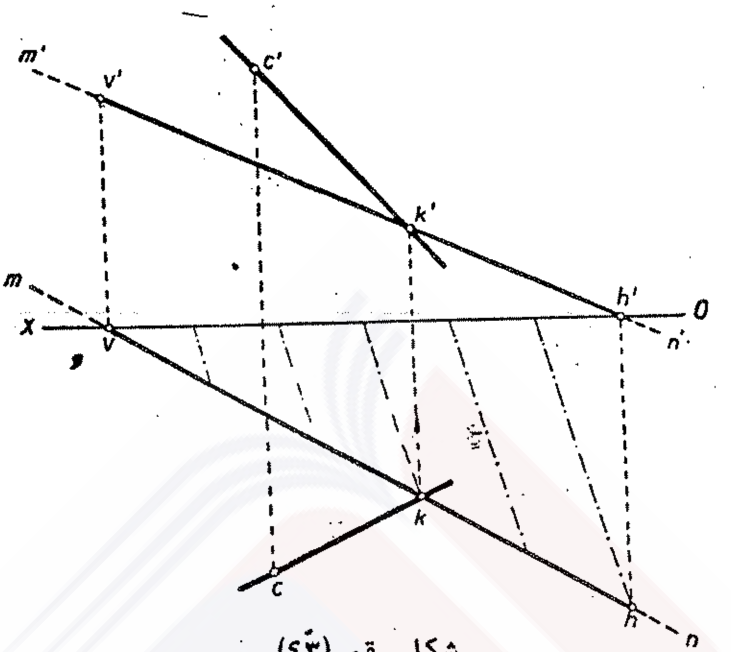



شكل رقم (٤٤)

**الحـل** : تحدد المسافة بين نقطة ومستقيم بطول مقطع العمود النـــازل مـــن النقطة على المستقيم ٠ من معطيات السؤال نلاحظ أن المستقيم AB هـــو مستقيم أفقي ٠ لهذا ، وفق قاعدة اسقاط الزاوية القائمة يتعامد المسقطـــان الأفقيان ab للمستقيم AB و ck للعمود النازل من النقطة C على هذا المستقيـم ٠ لذلك ننزل من النقطة c عمودا عـــلى ab فيقطعه في النقطة k ٠ نوجد 'k وفـــق قواعد الاسقاط العامة ٠ بعد ذلك نحـــدد الطول الحقيقي لمقطع العمود CK بطريقة المثلث قائم الزاوية فنأخذ على المستقيـم ab ( لأنه يعامد ck أساسا ) من النقطة k مقطعا يساوي فرق احداثيات 'c و 'k



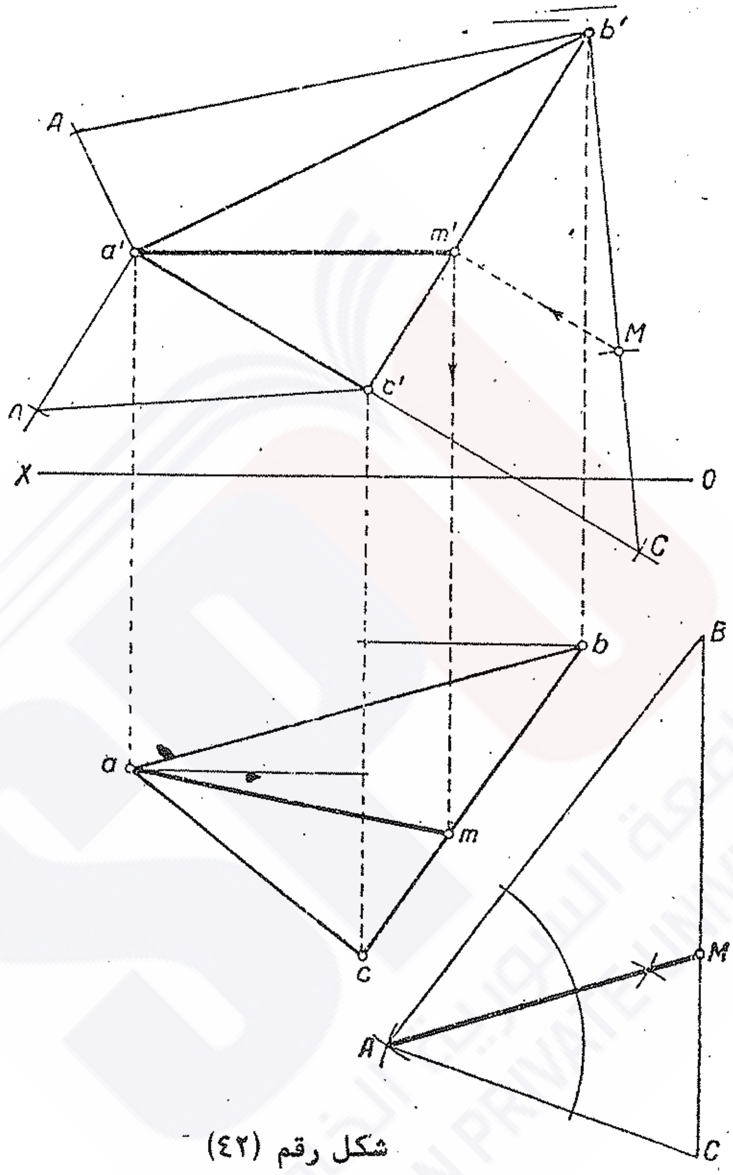

شكل رقم (٤٥)




شكل رقم (٤٣)

**الحل :** من التعبير الاسقاطي المستوي ( الشكل ٤٤ ) نلاحظ أن المستقيم AB مستقيم اسقاطي جانبي ولهذا فان المستقيم الذي يعامده يكون مستقيما جانبيا • ولكي يكون المستقيم المطلوب MN عموديا على المستقيم CD لابد من تعامد مسقطيهما الجانبيين m"n" و C"d" حسب قاعدة اسقاط الزاوية القائمة • لذلك نمرر من المسقط الجانبي a"b" للمستقيم AB المستقيم m"n" بحيث يعامد c"d" ويتقاطع معه في النقطة n", ونحدد ، حسب قواعد الاسقاط العامة ، المسقطين الأمامي n' والأفقي n لنقطة تقاطع المستقيمين CD و MN على المسقطين الأمامي c'd' والأفقي cd ( لأنها احدى نقاط المستقيم CD ) ونمرر من n و n' مستقيمين يعامدان خط الأرض (OX) فنحصل على المسقطين الأفقي mn و الأمامي m'n' للمستقيم المطلوب •

**١٣ـ حدد المسافة بين النقطة C والمستقيم AB ( الشكل ٤٥ )**




شكل رقم (٤٢)

المطلوب من المساقط المتماثلة للنقطتين K و C وتحديدا نحصل على أن المسقط الأفقي ck للمستقيم المطلوب يمر من النقطتين k و c ومسقطه الأمامي c'k' يمر من النقطتين k' و c'

١٢ـ اقطع المستقيمين AB و CD بمستقيم ثالث يعامدهما .

في حالات خاصة ، يمكن الحصول على نقطة واحدة أو عدم الحصول على أي نقطة على المستقيم BC تحقق الطلب المعني ( ماهي هذه الحالات ؟ ) .

١٠- ارسم منصف الزاوية الرأسية A للمثلث ABC

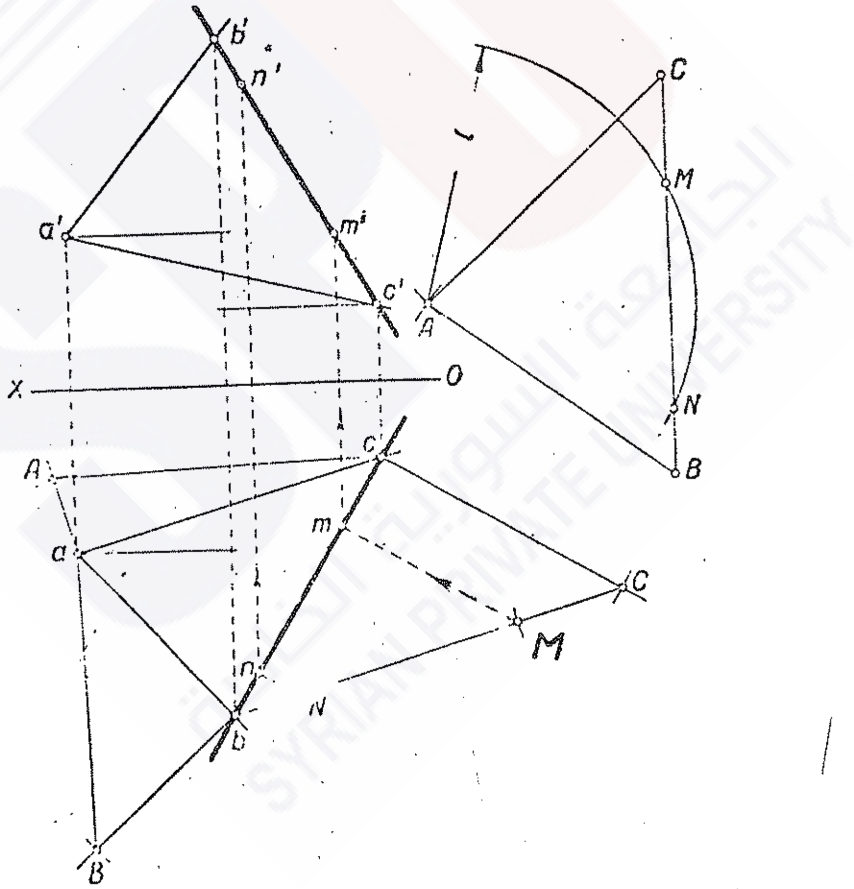
**الحل :** نحدد ، كما في الأمثلة السابقة ، الشكل الحقيقي ( القياسات الحقيقية ) للمثلث (abc,a'b'c') ونرسم مثلثا مناظرا مساعدا ABC ( الشكل ٤٢) ونمرر من الرأس A منصف زاويته الذي يقطع الضلع BC في النقطة M .

نأخذ على المستقيم b'C من النقطة b' مقطعا b'M يساوي BM وننزل من النقطة M على b'C عمودا على الضلع b'c' فنحصل على النقطة m' ومن ثم نحدد النقطة m وفق قواعد الاسقاط العامة وبذلك يكون المستقيم (am,a'm') هو منصف زاوية الرأس A المطلوب .

١١- مرر من النقطة C مستقيما يقطع المستقيم MN في نقطة تقسم مقطع المستقيم MN المحدد بأثريه الأمامي والأفقي بنسبه ٢ : ٣ في الاتجاه من (H) نحو (V) .

**الحل :** نحدد وفق قواعد الاسقاط العامة أثري المستقيم (mn,m'n') الأمامي ( V(v,v' والأفقي H(h,h') . ونقسم أحد مساقط المستقيم ، وليكن المسقط الأفقي ، حسب النسبة المحددة ( وهي ٢ : ٣ ) فتكون النقطة k هي نقطة التقسيم ( الشكل ٤٣) . من ثم نحدد المسقط الأمامي k' على المسقط الأمامي m'n' للمستقيم MN . بعد ذلك نمرر مساقط المستقيم

ونرسم من النقطة A قوسا بنصف قطر مقداره $l$ بقطع الضلع BC في النقطتين M و N ( الشكل ٤١) • بعد ذلك نأخذ من النقطة b على المستقيم bC المقطعين bM و bN مساويين للمقطعين BM و BN ومن النقطتين M و N على bC ننزل أعمدة على bc فنحصل على النقطتين m و n ومن ثم نحدد 'm و 'n وفق قواعد الاسقاط العامة • وبهذا تكون احدى النقطتين (m,m') أو (n,n') هي النقطة المطلوبة •



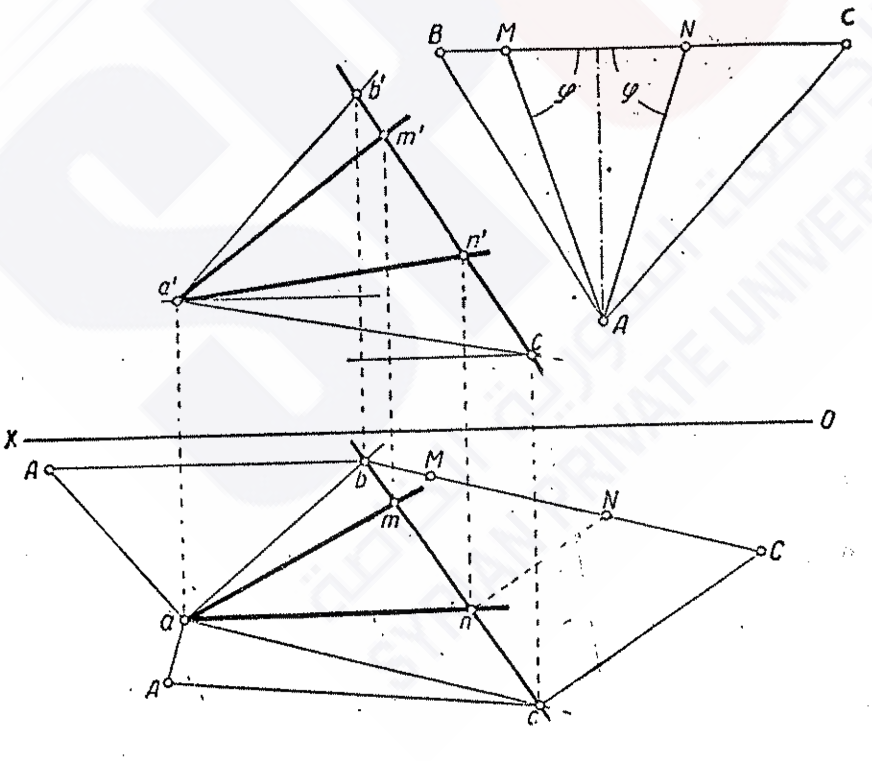

شكل رقم (٤١)

مساويين للمقطعين BM و BN وننزل من النقطتين M و N على bC أعمدة على المستقيم bc فنحصل على النقطتين m و n .

د ـ نحدد المساقط الأمامية 'm و 'n حسب قواعد الاسقاط العامة .
وبهذا يكون أحد المستقيمين (am,a'm') أو (an,a'm') هو المستقيم المطلوب .

٩ـ حدد على المستقيم BC نقطة تبعد عن النقطة A مسافة $\ell$

**الحل** : كما في المثال السابق نضم المستقيم (bc,a'b') والنقطة (a,a') في مثلث (abc,a'b'c') ونحدد شكله الحقيقي ونرسم مثلثا مناظرا مساعدا ABC




شكل رقم (٤٠)

بعدي نهايتي المسقط الأفقي a و b لهذا المستقيم عن خط الأرض .

هـ ـ نستخدم هذا الفرق لتحديد وضع المسقط الأفقي ab للمستقيم المساعد. وبما أن النقطة A واقعة في مستوي الاسقاط الأمامي V فيقع مسقطها الأفقي a على خط الأرض ونحدد المسقط الأفقي b للنقطة B باقامة خط تداع من النقطة 'b يعامد خط الأرض (OX) ونأخذ عليه المقطع 'bb مساويا للضلع $b_1k$ فنحصل على النقطة b . نوصل a و b بمستقيم فنحصل على المسقط الأفقي ab للمستقيم المساعد .

و ـ المستقيم المطلوب والمار من النقطة C يجب أن يوازي المستقيم المساعد AB ، وحسب قواعد الاسقاط والمستقيمات المتوازية فان مساقط المستقيم المطلوب MN توازي مساقط المستقيم المساعد المماثلة . لذلك نمرر من 'c مستقيما يوازي 'a'b ونمرر من c مستقيما يوازي ab فنحصل على التعبير الاسقاطي الثنائي للمستقيم المطلوب .

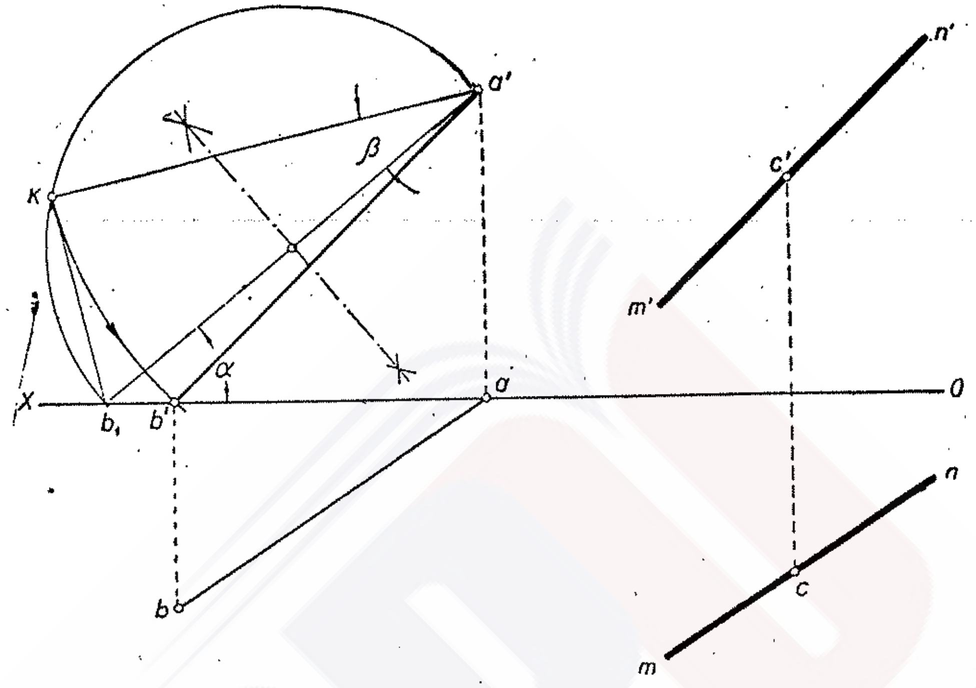
٨ـ مرر من النقطة A مستقيما يقطع المستقيم BC بزاوية $\varphi$ .

**الحــل :**

آ ـ نضم المستقيم (BC(bc,b'c' والنقطة (A(a, a' في مثلث (abc,a'b'c') ونحدد شكله الحقيقي ( قياسات أضلاعه الحقيقية ) بطريقة المثلث قائم الزاوية . بعد ذلك نرسم مثلثا مناظرا ABC مساعدا ( الشكل ٤٠ ) .

ب ـ نمرر من النقطة A في المثلث المساعد مستقيمين AM و AN يصنعان مع المستقيم BC الزاوية $\varphi$ .

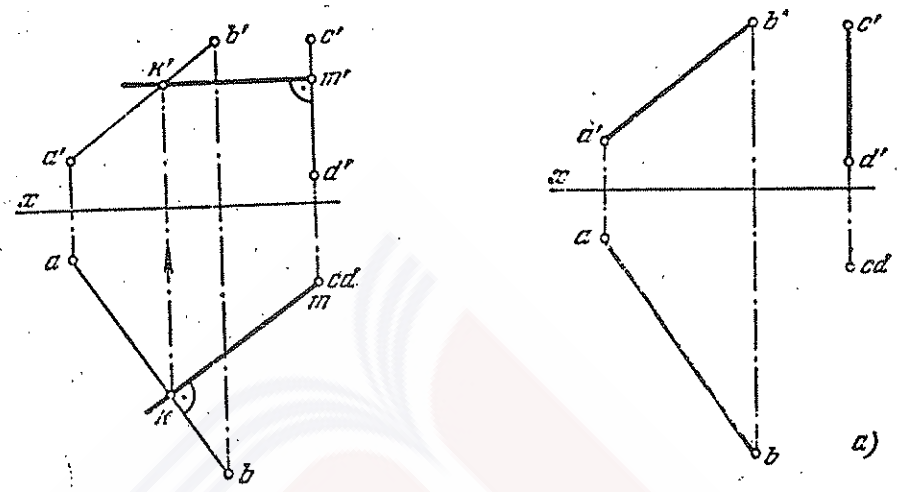
جـ ـ نأخذ من النقطة b على المستقيم bC المقطعين bM و bN




شكل رقم (٣٩)

دائرة . بعد ذلك نرسم من النقطة 'a مستقيما يصنع زاوية β مع المستقيم $a'b_1$ فيقطع قوس نصف الدائرة في النقطة K ونوصل $Kb_1$ فنحصل على المثلث قائم الزاوية $a'Kb_1$ ( يمكن تحديد النقطة K دون اللجوء لرسم قوس نصف الدائرة ، وذلك برسم مستقيم من النقطة 'a يصنع مع المستقيم $a'b_1$ زاوية β ونقيم من النقطة $b_1$ عمودا على هذا المستقيم فيقطعه في النقطة K ) .

د ـ الضلع القائم a'k يساوي بالمقدار المسقط الأمامي للمستقيم المساعد. لايجاد وضعه الاسقاطي نرسم من النقطة 'a قوسا نصف قطره a'k فيقطع خط الأرض في النقطة 'b فنحصل على 'a'b المسقط الأمامي للمستقيم المساعد . أما الضلع القائم الثاني $b_1k$ فيحدد الفرق بين




شكل رقم (٣٨)

٣ـ نرسم من $k'$ مستقيما يوازي خط الأرض فيقطع $c'd'$ في $m'$ ونحصل على مسقطي المستقيم المطلوب$(mk, m'k')$ ويمثل $mk$ أقصر بعد بين المستقيمين .

٧ـ مرر من النقطة $C$ مستقيما يصنع زاوية $\alpha$ مع المستوي $H$ وزاوية $\beta$ مع المستوي $V$ بحيث لايزيد مجموع الزاويتين عن$90°$ $(\alpha + \beta \leqslant 90°)$.

**الحل** : لرسم مسقطي المستقيم المطلوب نقوم بمجموعة من الخطوات المساعدة :

آ ـ نأخذ نقطة كيفية $A(a, a')$ واقعة في مستوي الإسقاط الأمامي $V$ ونمرر من مسقطها الأمامي $a'$ مستقيما $a'b_1$ يصنع مع خط الأرض $(OX)$ زاوية $\alpha$ ( الشكل ٣٩ ) .

ب ـ نَعدّ هذا المستقيم وترا لمثلث قائم الزاوية ونرسم ضلعيه القائمين بحيث تساوي زاوية الرأس $a'$ الزاوية $\beta$ .

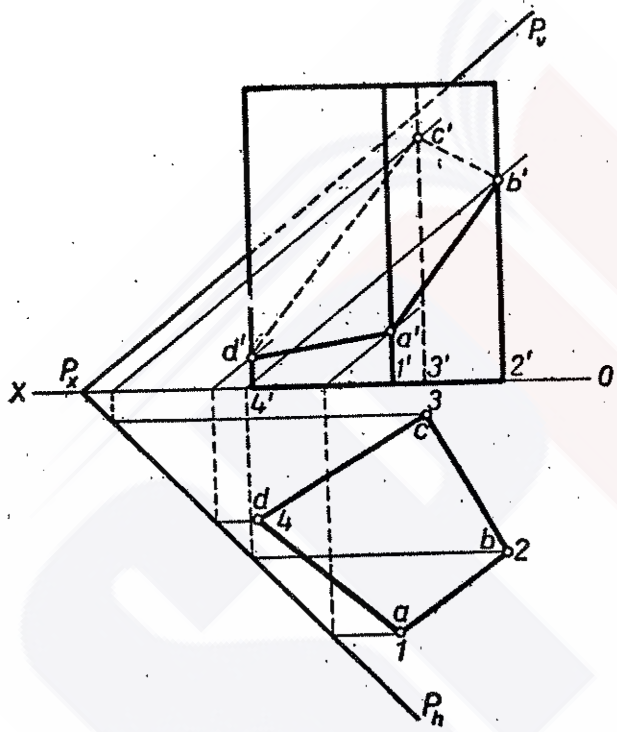
جـ ـ لهذا الغرض ننصف المستقيم $a'b_1$ ونرسم بنصف قطر $\frac{a'b_1}{2}$ قوس نصف

المستوي الثنائي وارسم مساقط نقطة كيفية واقعة على أحد سطوحه ( الشكل ٣٤٧ ) .

## ثانيا ـ تقاطع مستو مع متعدد السطوح المستوية :

### أمثلة تطبيقية :

أ ـ حدد سطح تقاطع المستوي P والموشور القائم ( الشكل ٣٤٨ ).



شكل رقم (٣٤٨)

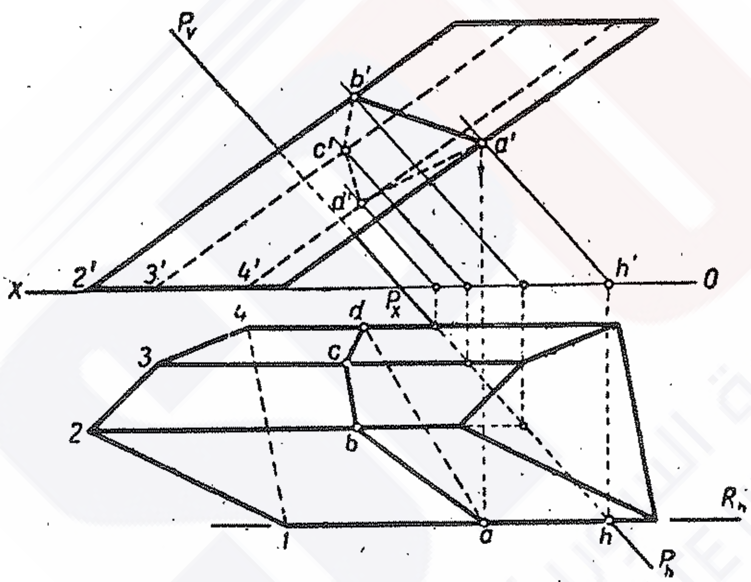
### الحل :

١ ـ تحديد سطح التقاطع يتم من خلال تحديد رؤوسه المتمثلة بنقاط تقاطع حروف الموشور مع المستوي P .

.. نحدد نقطة (a,a') تقاطع الحرف (1,1') مع المستوي P انطلاقا من أن هذه النقطة تنتمي للمستوي P ولهذا فهي تقع على أحد مستقيماته ومسقطها الأفقي a يتطابق مع مسقط الحرف المعني الأفقي لأنها احدى نقاطه . لذلك المسقط الأفقي للمستقيم المار من هذه النقطة ( وليكن جبهة المستوي ) يمر من a موازيا خط الأرض ويقطع $P_h$ في نقطة أثره . من تقاطع مسقطه الأمامي مع المسقط الأمامي لحرف

الموشور نحصل على المسقط الأمامي a' لنقطة تقاطع الحرف (1,1') مع المستوي P . نكرر العملية بالنسبة لبقية حروف الموشور فنحصل على نقاط (b,b') و (c,c') و (d,d') تقاطعها مع المستوي P . وبما أن الموشور قائم فان المسقط الأفقي abcd لسطح التقاطع يتطابق مع المسقط الأفقي (1-2-3-4) للموشور .

٢ـ حدد سطح تقاطع المستوي P مع الموشور المائل ( الشكل ٣٤٩ )




شكل رقم (٣٤٩)

**الحل :**

١ـ من الشكل نلاحظ أن حروف الموشور توازي المستوي V .

٢ـ كما في المثال السابق ، تحديد سطح التقاطع يتم من خلال تحديد نقاط تقاطع حروف الموشور مع المستوي P .

٣ـ لتحديد نقطة (a,a') تقاطع الحرف (1,1') مع المستوي P نمرر من

الحرف مستويا تطابقيا أماميا R ( نحدده بأثره الأفقي $R_h$ ).
يتقاطع مع المستوي P بجبهة مستو ( مستقيم أمامي ) ، ومن تقاطع المسقطين الأماميين لخط التقاطع ولحرف الموشور نحدد نقطة 'a المسقط الأمامي لنقطة تقاطع الحرف ('1,1) مع المستوي P • نحدد مسقطها الأفقي a على المسقط الأفقي للحرف (1) •

٤ـ نكرر العملية السابقة بالنسبة لبقية حروف الموشور فنحدد نقاط ('b,b) و ('c,c) و ('d,d) تقاطعها مع المستوي P •

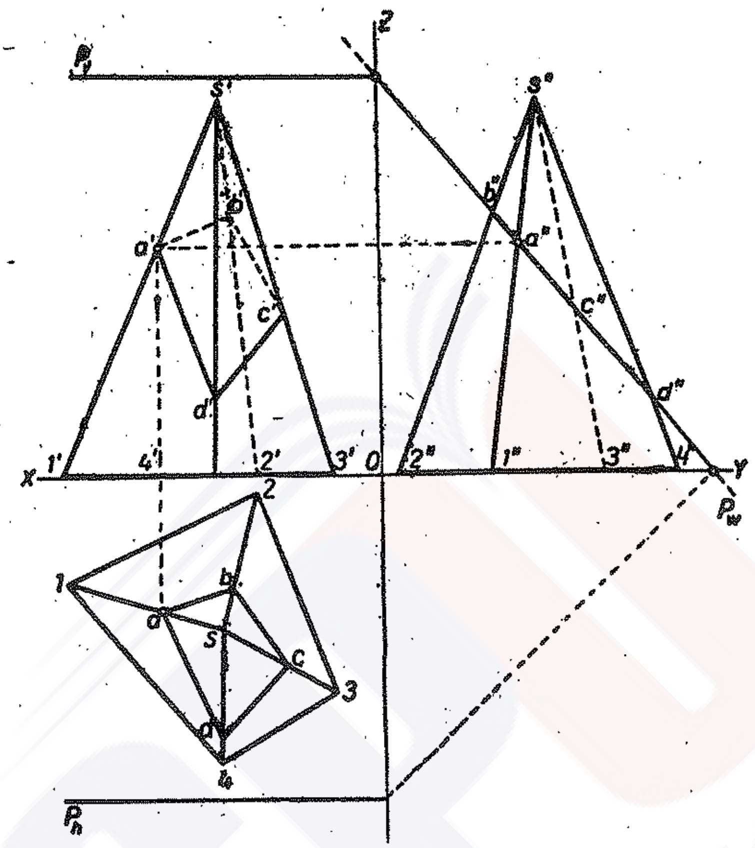
٥ـ نصل 'a'b'c'd و abcd فنحصل على مسقطي سطح التقاطع الأمامي والأفقي •

٣ـ حدد خط تقاطع سطوح الهرم مع المستوي P ( الشكل ٣٥٠ ) •

الحـل : المستوي P مستو اسقاطي جانبي يوازي خط الأرض ، ولذلك نستخدم التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي للتوصل للحل المطلوب الذي يمكن الحصول عليه من تحديد نقاط تقاطع حروف الهرم مع المستوي P •

في المسقط الجانبي يتطابق المسقط الجانبي "a"b"c"d لسطح التقاطع مع الأثر الجانبي $P_w$ للمستوي P ونحصل على نقاط هذا المسقط من تقاطع المساقط الجانبية لحروف الهرم الجانبية مع الأثر الجانبي $P_w$ للمستوي •

نحدد حسب قواعد الاسقاط العامة ، المساقط الأمامية والأفقية لهذه النقاط ومن ثم نصلها بالتسلسل فنحصل على المسقط الأفقي abcd والأمامي 'a'b'c'd لسطح التقاطع •



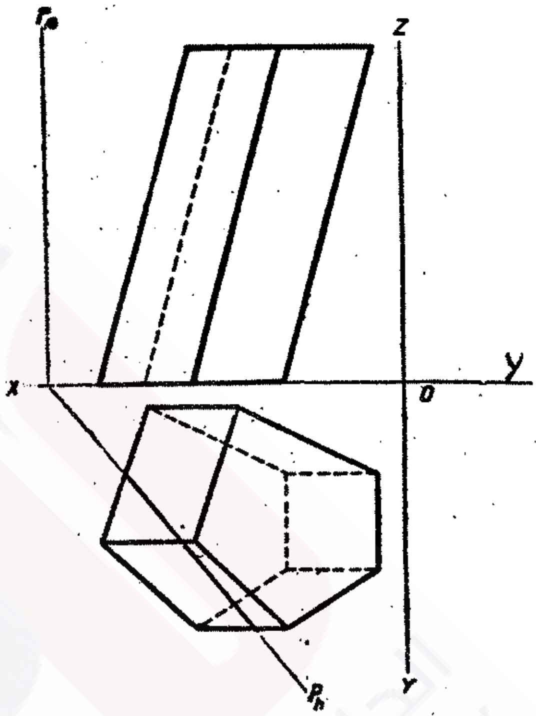

شكل رقم (٣٥٠)

## تمـــارين تطبيقيــــة :

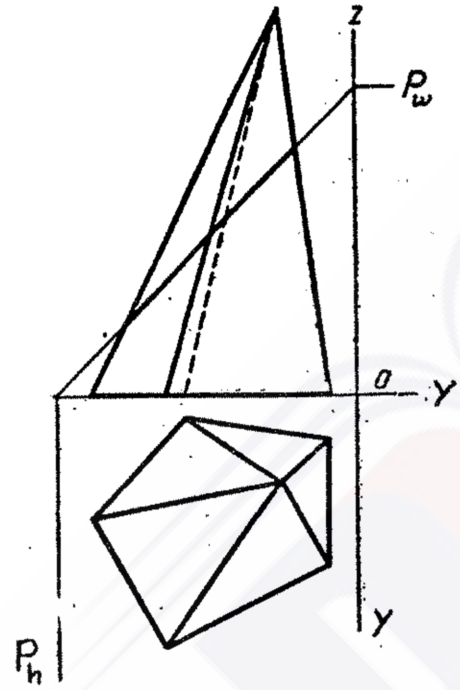
١ـ استكمل التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي لتقاطع مستو مع متعـــــدد السطوح مع تحديد مساقط سطوح التقاطع ( الأشكال ٣٥١ ـ ٣٥٣ )٠ ميّز بين الأجزاء المرئية وغير المرئية بالتنقيط ٠

٢ـ ارسم سطح تقاطع المستوي P مع متعدد السطوح ( الأشكال ٣٥٤ـ٣٦٣)

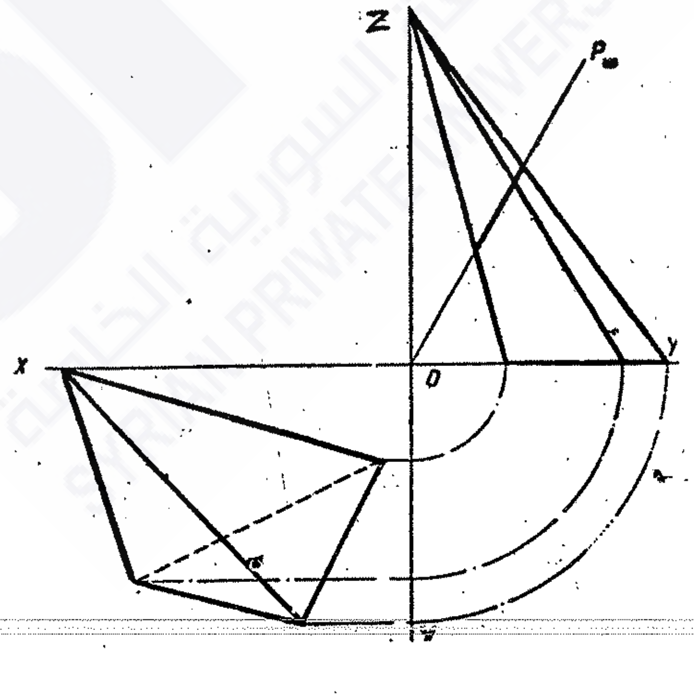
٣ـ ارسم سطح تقاطع الهرم مع المستوي P العمودي على الحـــــرف SA والمنصف له ، وحدد الأجزاء المرئية والمخفية منهما ( الشكل ٣٦٤ )٠



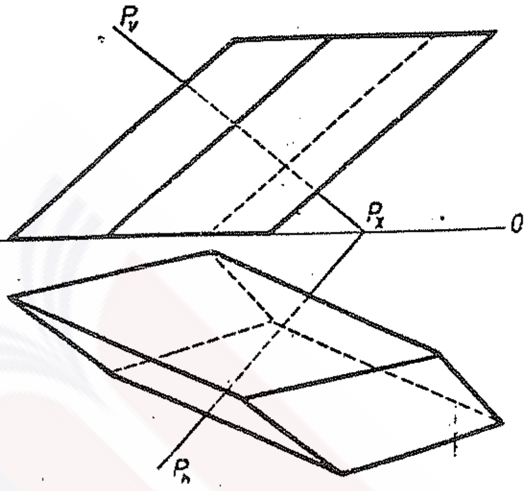

شكل رقم (٣٥١)



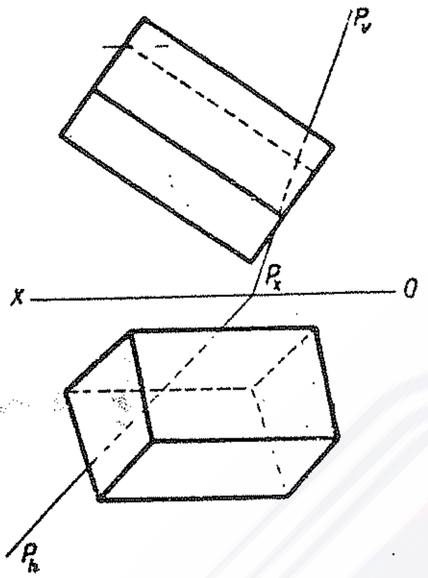

شكل رقم (٣٥٢)



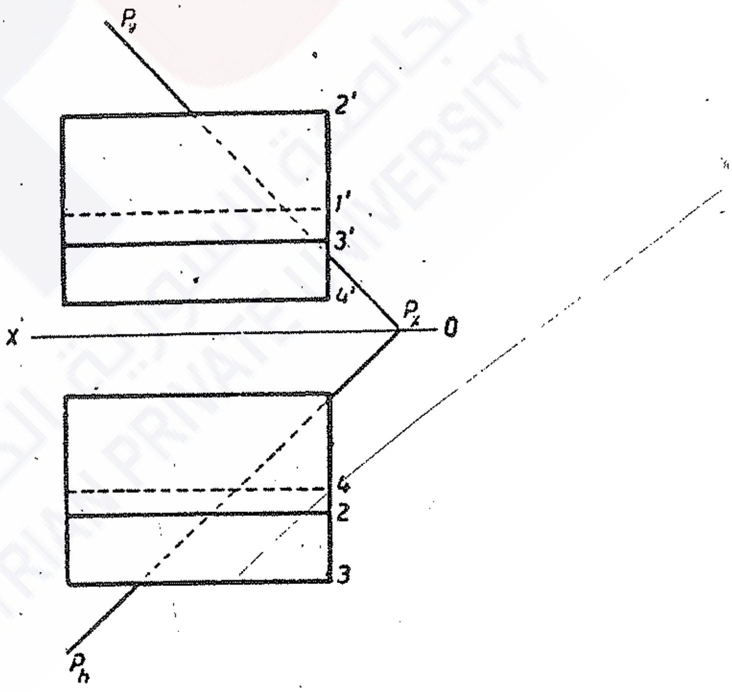

شكل رقم (٣٥٣)



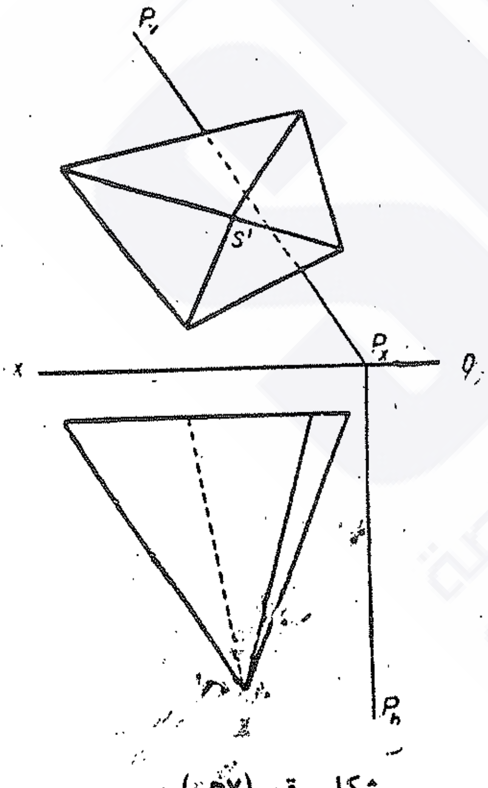

شكل رقم (٣٥٤)



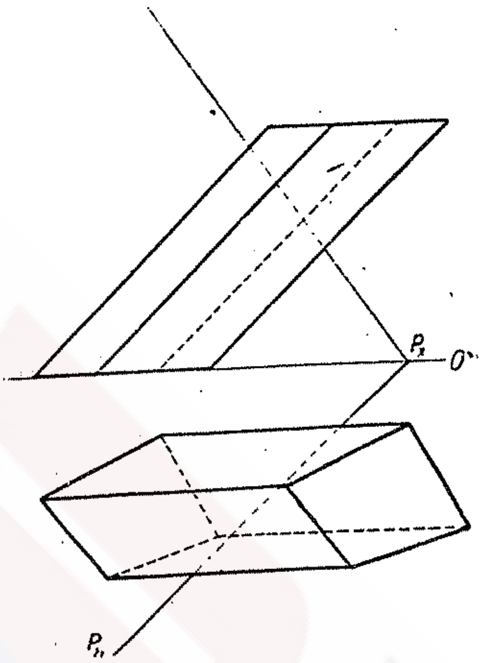

شكل رقم (٣٥٥)



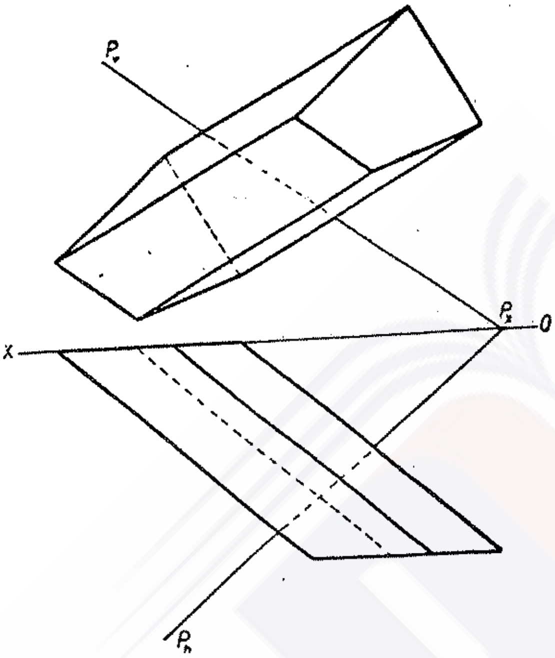

شكل رقم (٣٥٦)



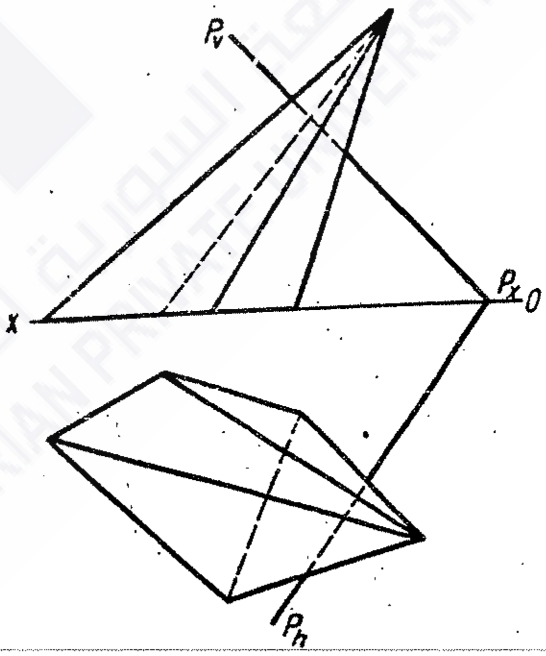

شكل رقم (٣٥٧)



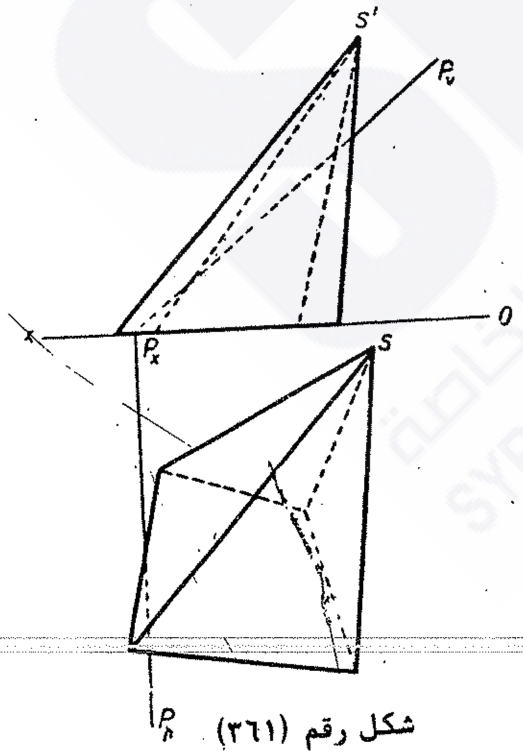

شكل رقم (٣٥٨)



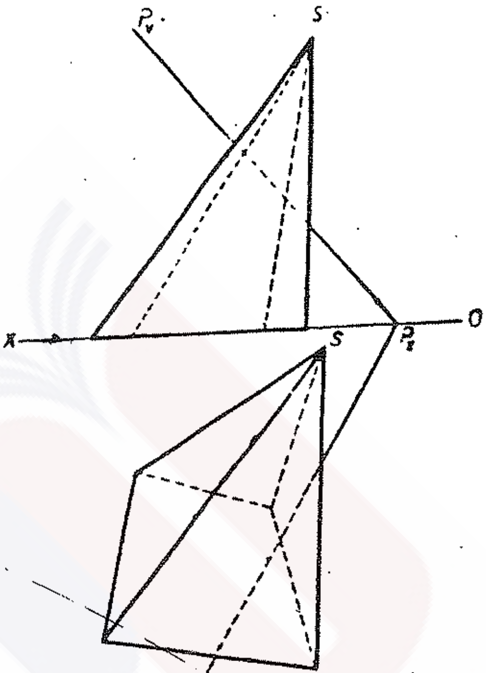

شكل رقم (٣٥٩)



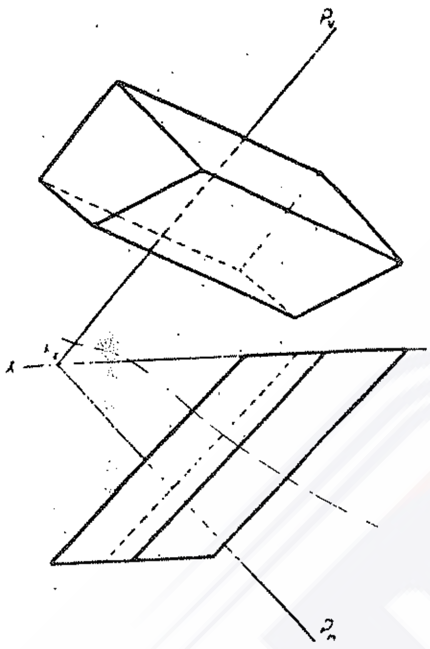

شكل رقم (٣٦٠)



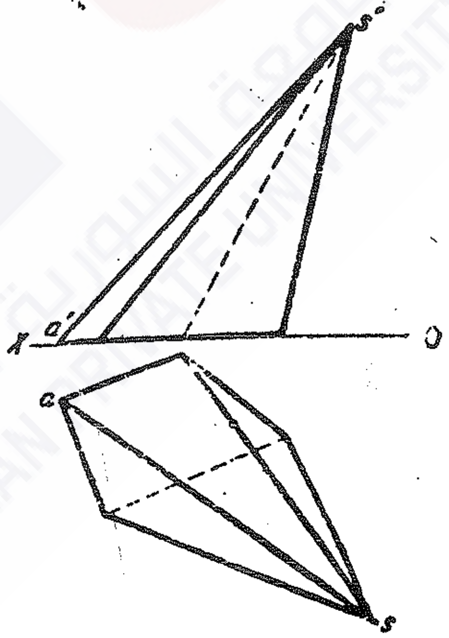

شكل رقم (٣٦١)



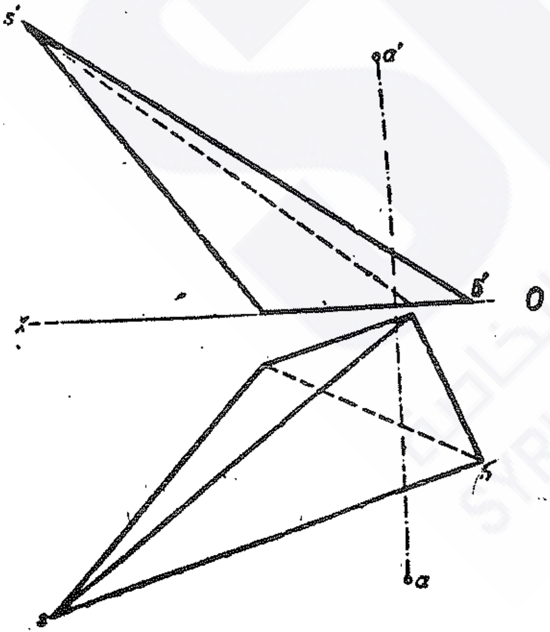

شكل رقم (٣٦٢)




شكل رقم (٣٦٣)



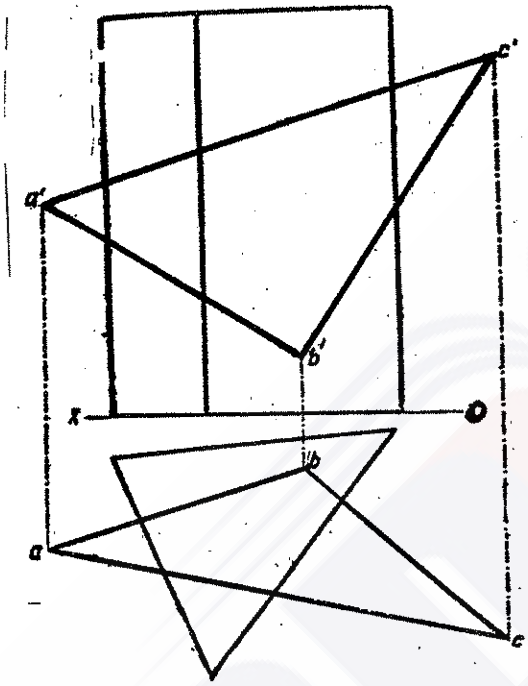

شكل رقم (٣٦٤)



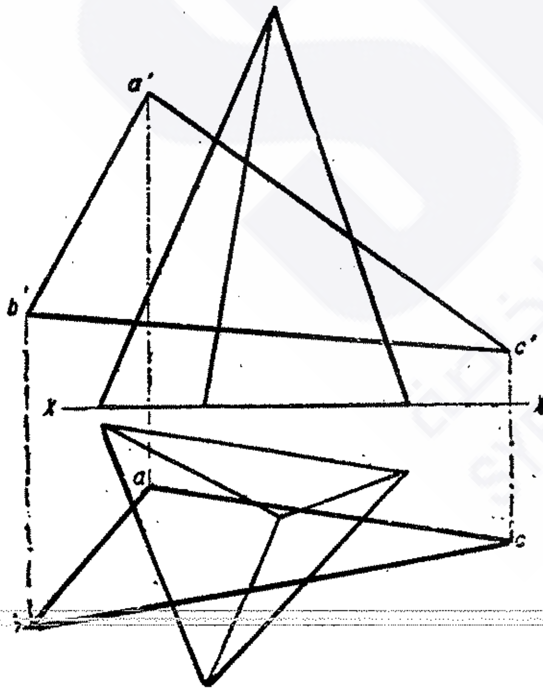

شكل رقم (٣٦٥)

٤ـ ارسم سطح تقاطع الهرم مع المستوي P المار من النقطة A عموديا على حرف الهرم SB وحدد الأجزاء المرئية والمخفية منهما ( الشكل ٣٦٥ ) .

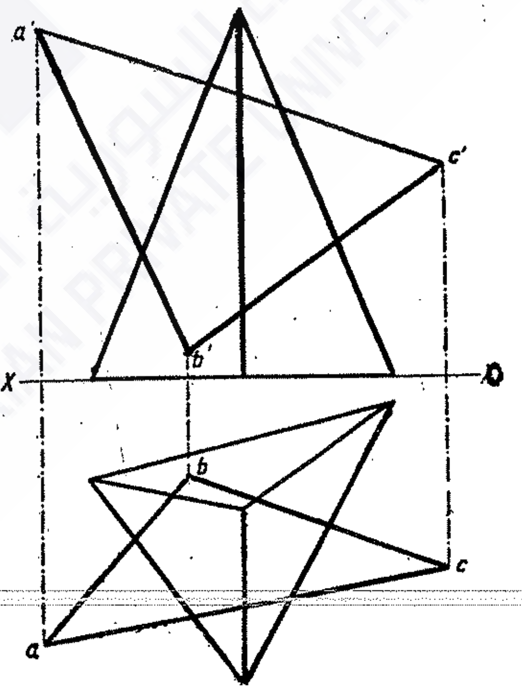
٥ـ حدد سطح تقاطع متعدد السطوح مع مستوي المثلث ABC وحدد وضعهما الفراغي المتبادل مستعينا بالتنقيط الأشكال (٣٦٦ ـ ٣٧٢) .



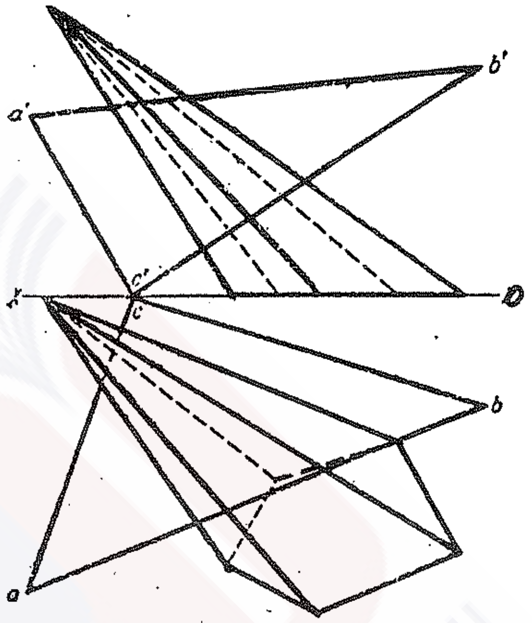

شكل رقم (٣٦٦)



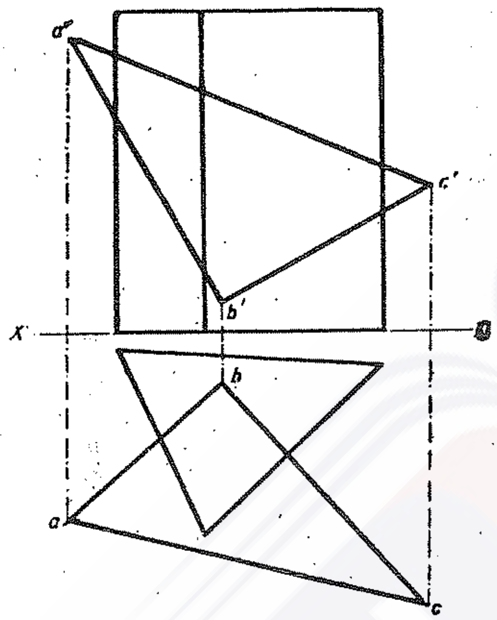

شكل رقم (٣٦٨)



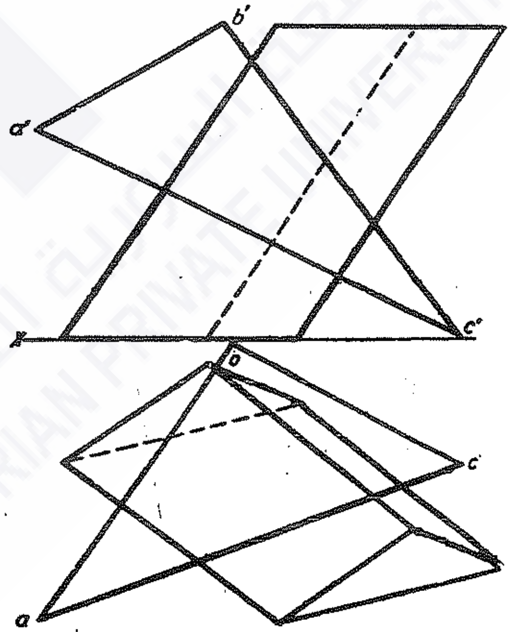

شكل رقم (٣٦٧)



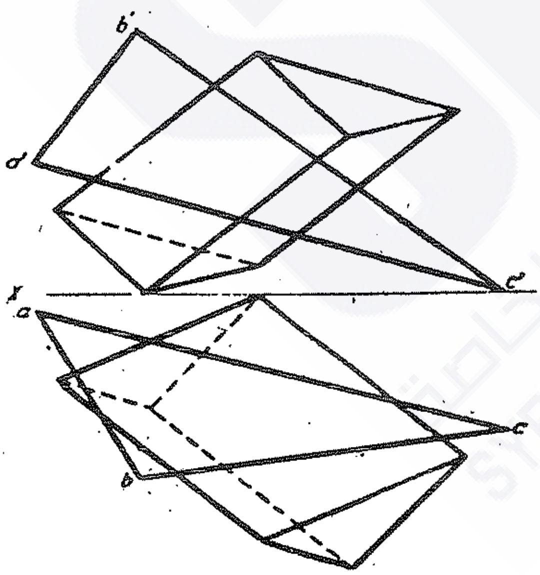

شكل رقم (٣٦٩)




شكل رقم (٣٧٠)




شكل رقم (٣٧١)




شكل رقم (٣٧٢)

## ثالثا ـ تقاطع مستقيم مع متعددات السطوح المستوية :

### أمثلة تطبيقيـــة :

يمكننا الحصول على نقطتي تقاطع ( دخول وخروج ) مستقيم مع الأجســام متعددات السطوح المستوية ( الموشور أو الهرم ) بالطريقة ذاتها التـــي اتبعناها للحصول على نقطة تقاطع مستقيم مع مستو ، وذلك باتباع الخطوات التالية :

آ ـ امرار مستو مساعد من المستقيم المعني ٠

ب ـ تحديد خطوط تقاطع ( الفصول المشتركة ) سطوح متعدد السطوح مـــع المستوي المساعد ( تحديد سطح التقاطع ) ٠

ج ـ تحديد نقطتي تقاطع المستقيم المعني مع سطح التقاطع فتكوّنـــــا النقطتين المطلوبتين ٠

هنالك حالة خاصة يكون فيها المستقيم مماسا لمتعدد السطوح ٠ فـــي هذه الحالة يكون المستقيم منتميا لأحد سطوح الجسم أو منطبقا على أحـــد حروفه أو مارا من احدى نقاط أحد حروفه ٠

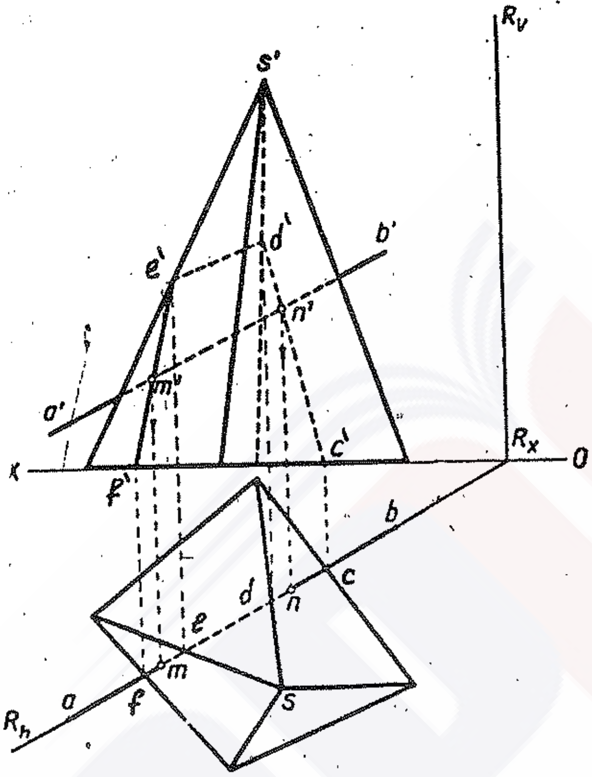
يفضل اختيار المستوي المساعد ، تسهيلا للحل ، في وضعية تجعـــل فصوله المشتركة مع سطوح الجسم متعدد السطوح خطوطا مستقيمة ٠

**مثـــال ١** : حدد نقطتي اختراق المستقيم AB للموشور الرباعي القـــائم ( الشكل ٣٧٣ ) ٠

**الحـــل** : هنالك طريقتان للحل :

* **الطريقة الأولى** : بما أن الموشور قائم فان سطوحه تمثل مستويات اسقاطية

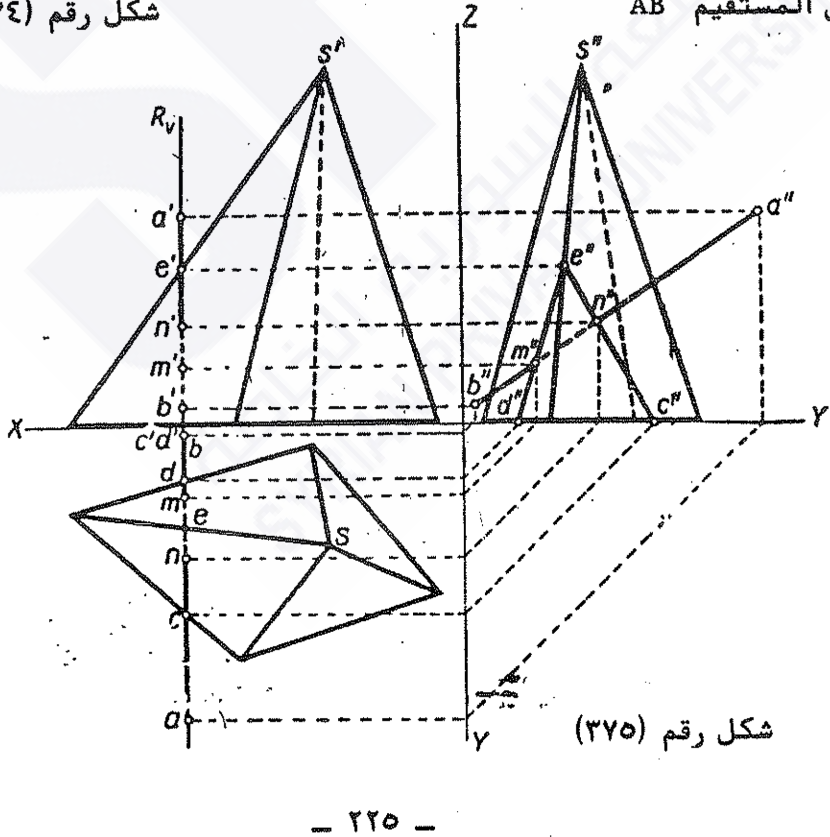
المسقطين الأماميين 'n و 'm لنقطتي N و M اختراق المستقيم AB للهرم • نحدد مسقطيهما الأفقيين n و m على ab حسب قواعد الاسقاط •




شكل رقم (٣٧٤)

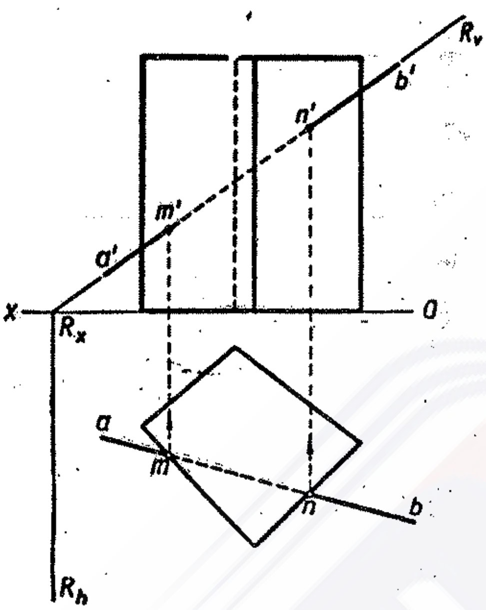
**مثال ٣** : حدد نقطتي اختراق المستقيم AB للهرم الرباعي ( الشكل ٣٧٥ ) •

**الحل** : نلاحظ من الشكل أن المستقيم AB




شكل رقم (٣٧٥)

أفقية • ولذلك نقطتا تقاطع المسقط الأفقي للمستقيم ab مع آثار هذه المستويات تحدد لنا المسقطين الأفقيين n و m لنقطتي اختراق المستقيم للموشور الرباعي • نحدد مسقطيهما الأماميين 'n و 'm على 'a'b حسب قواعد الاسقاط •




شكل رقم (٣٧٣)

* **الطريقة الثانية** : نمرر من المستقيم AB مستويا اسقاطيا أماميا مساعدا R يقطع الموشور بسطح رباعي الأضلاع ينطبق مسقطه الأمامي على الأثر الأمامي $R_V$ للمستوي المساعد ( المتطابق مع المسقط الأمامي 'a'b ) وينطبق مسقطه الأفقي على المسقط الأفقي للموشور • نقطتا تقاطع المسقط الأفقي ab للمستقيم AB مع المسقط الأفقي لسطح التقاطع n و m تحددان المسقطين الأفقيين لنقطتي اختراق المستقيم لسطوح متعدد السطوح • نحدد مسقطيهما الأماميين 'n و'm على 'a'b وبذلك نحصل على النقطتين المطلوبتين (N(n,n' و (M(m,m' •

**مثال ٢** : حدد نقطتي اختراق المستقيم AB لسطوح الهرم ( الشكل ٣٧٤)•

**الحل** : نمرر من المستقيم AB مستويا اسقاطيا أفقيا R يقطع سطوح الهرم بسطح رباعي الأضلاع CDEF يتطابق مسقطه الأفقي cdef مع الأثر الأفقي $R_h$ للمستوي • نحدد ، حسب قواعد الاسقاط ، مسقطه الأمامي 'c'd'e'f وتحدد نقطتا تقاطع المسقط الأمامي 'a' b مع 'c'd'e'f

جانبي ، لذلك ولتحديد وضعه الفراغي لابد من معرفة مسقطه الجانبي ، ولذلك يتوجب علينا استخدام التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي ٠

نمرر من المستقيم AB مستويا تطابقيا جانبيا R يقطع سطوح الهرم بالمثلث CDE ٠ تحدد نقطتا تقاطع المسقط الجانبي a"b" للمستقيم AB مع المسقط الجانبي c"d"e" لسطح التقاطع المسقطين الجانبيين n" و m" لنقطتي اختراق المستقيم AB لسطوح الهرم ٠ نحدد ، حسب قواعد الاسقاط العامة ، مساقطهما الأفقية n و m والأمامية n' و m' على ab و a'b' على التوالي ٠

تحديد الأجزاء المخفية من المستقيم يتم وفق مايلي :

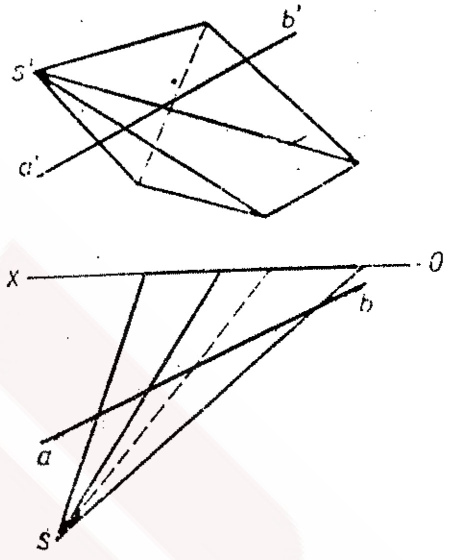
١ــ يكون مقطع المستقيم المحدد بنقطتي الاختراق مخفيا في جميع المساقط ٠

٢ــ اذا كانت نقطة الاختراق في الجزء المرئي من سطح متعدد السطوح يبقى مسقط مقطع المستقيم مرئيا حتى نقطة الاختراق ، كما هو الحال في المثال الأول وفي المسقط الأفقي للمثال الثاني وفي المسقطين الأفقي والجانبي للمثال الثالث ، وكذلك فيما يخص المقطع a'n' من المسقط الأمامي في المثال الثالث ٠

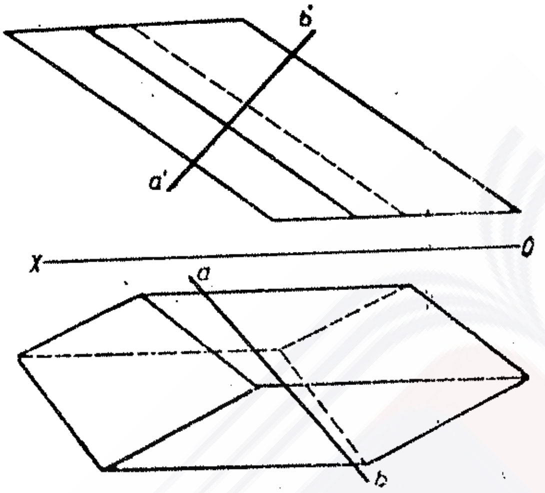
٣ــ اذا كانت نقطة الاختراق في الجزء المخفي من سطح متعدد السطوح فان مقطع المستقيم يبقى مخفيا حتى تجاوزه حرف السطح المخفي ، كما هو الحال في المسقط الأمامي من المثال الثاني ، وكما هو الحال بالنسبة لمقطع المسقط الأمامي b'm' في المثال الثالث ٠

**تمارين تطبيقية :**

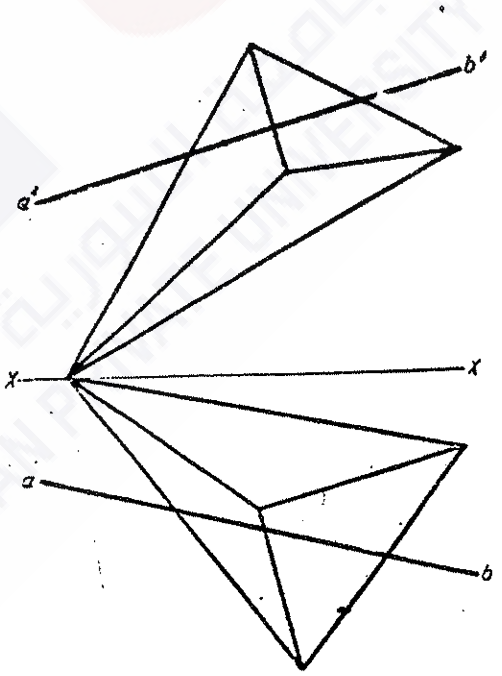
١ــ حدد نقطتي اختراق المستقيم AB لسطوح متعدد السطوح ( الأشكال ٣٧٦ ــ ٣٨١ ) ، وحدد الأجزاء المرئية والمخفية من المستقيم في



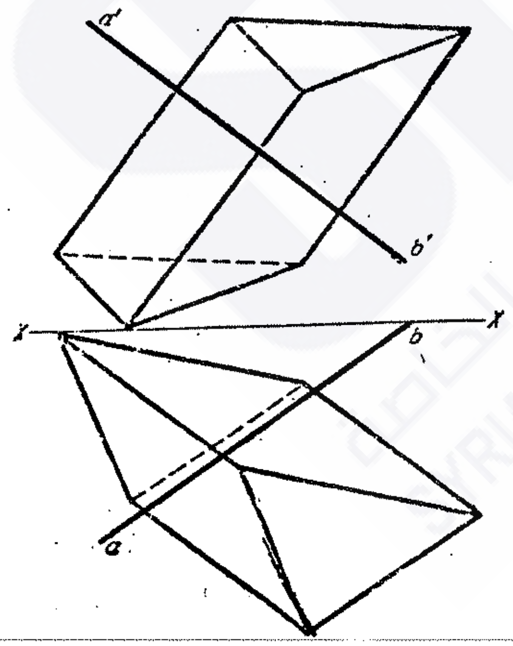

شكل رقم (٣٧٦)



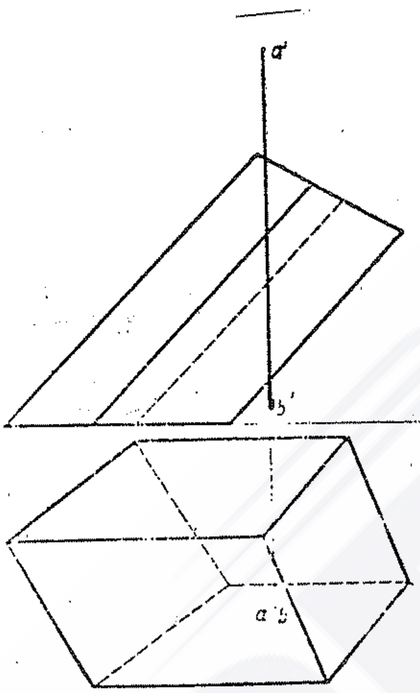

شكل رقم (٣٧٧)



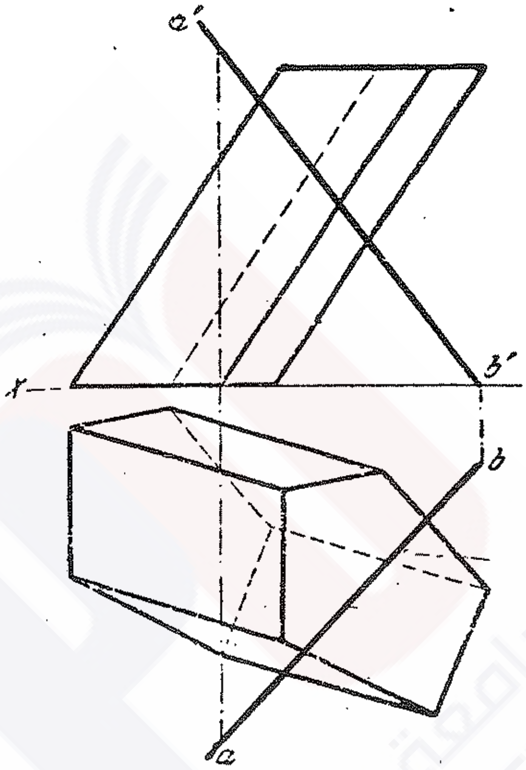

شكل رقم (٣٧٨)




شكل رقم (٣٧٩)




شكل رقم (٣٨١)




شكل رقم (٣٨٠)

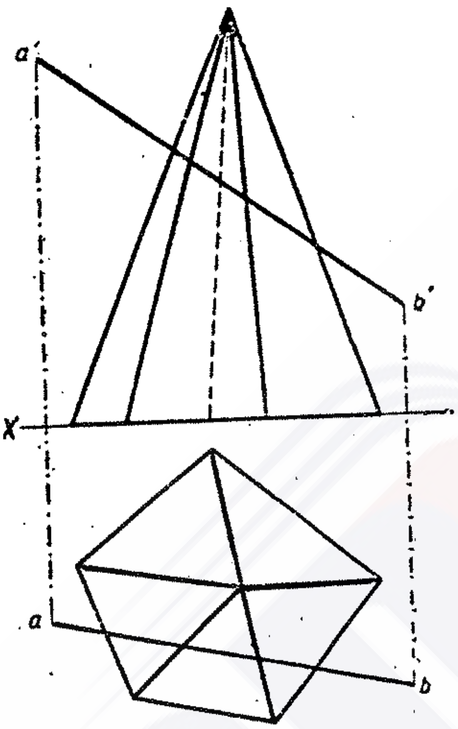
المسقطين الأمامي والأفقي والمسقط الجانبي ان وجد ٠

٢ـ هل يتقاطع المستقيم AB مع متعدد السطوح ( الشكلان ٣٨٢ و ٣٨٣ )؟

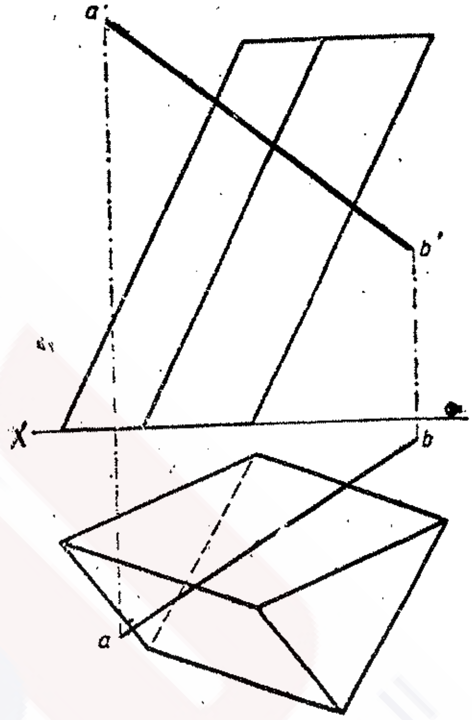
٣ـ مرر من النقطة A مستقيما يعامد سطح الموشور BCDE وحدد نقطتي اختراقه لأوجه الموشور وأجزاءه المرئية والمخفية ( الشكلان ٣٨٣و٣٨٥)٠

٤ـ مرر من النقطة A مستقيما يعامد وجه الهرم SBC وحدد نقطتي اختراقه سطوح الهرم وأجزاءه المرئية والمخفية ( الشكل ٣٨٦ ) ٠

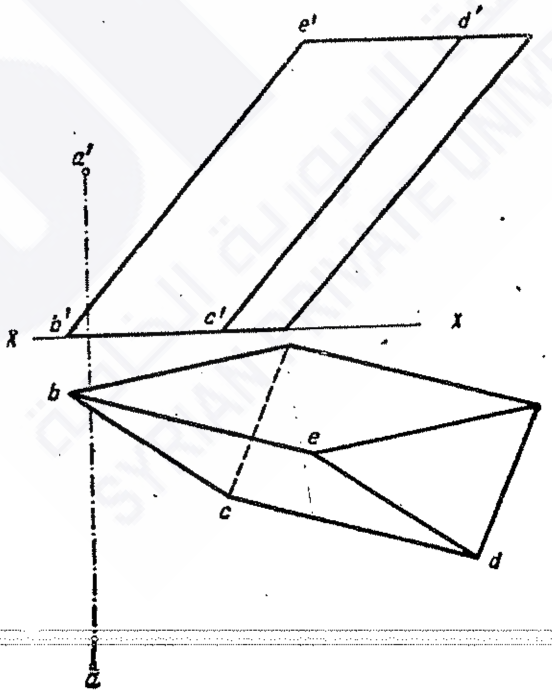
٥ـ حدد نقطتي اختراق المستقيم AB لسطوح الموشور ( الشكل ٣٨٧ ) موضحا أجزاءه المرئية والمخفية في المسقطين ٠



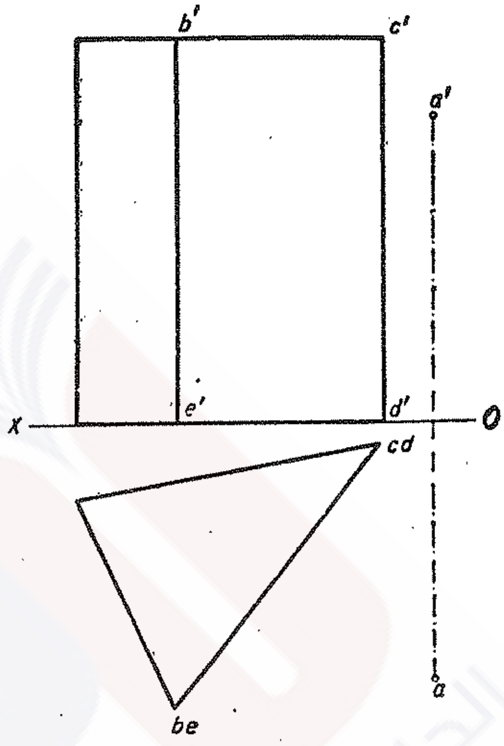

شكل رقم (٣٨٣)



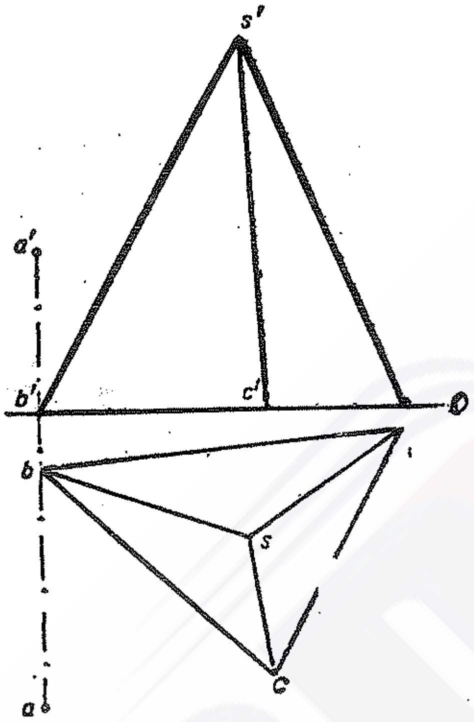

شكل رقم (٣٨٢)



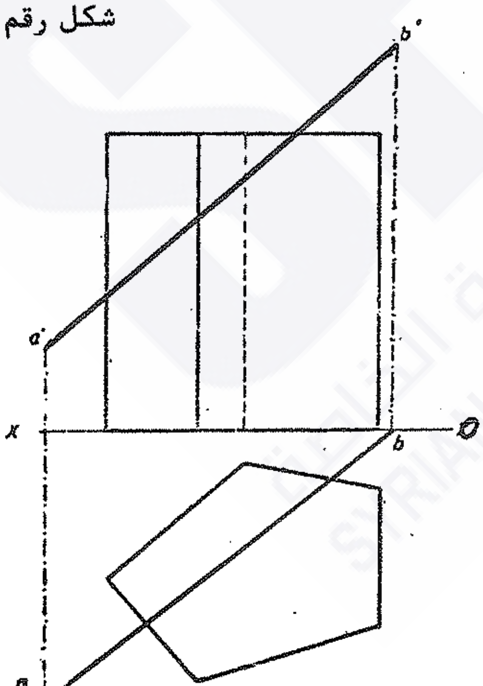

شكل رقم (٣٨٤)



شكل رقم (٣٨٥)



شكل رقم (٣٨٦)

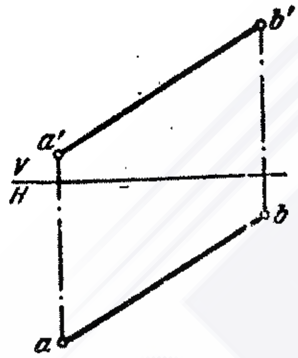


شكل رقم (٣٨٧)

# الفصل السابع

## تغيير الوضع الاسقاطي للعنصر الهندسي

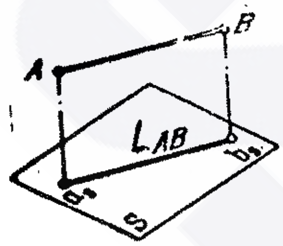
### أمثلة تطبيقيـــة :




شكل رقم (٣٨٨)

١- حدد الطول الحقيقي لمقطع المستقيم AB ( الشكل ٣٨٨ ) .

**الحـــل** : يكون مسقط مستقيم مساويا لطـول المستقيم الفراغي ( مع الأخذ بعين الاعتبـــار مقياس الرسم ) عندما يوازي المستقيم مستوي الاسقاط ( الشكل ٣٨٩ ) . لذلك وبما أن المستقيم AB في حالته العامة ( الشكل ٣٨٨ ) فان مساقطـه لاتعبر عن طوله الحقيقي ولابد من تغيير وضعـــه الاسقاطي وجعله موازيا لأحد مستويات الاسقـاط .

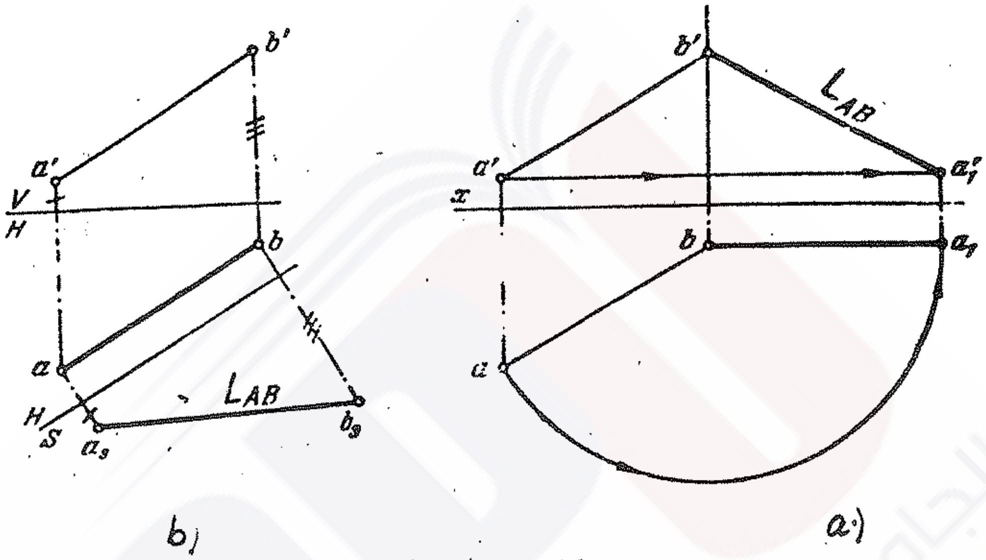



شكل رقم (٣٨٩)

ويمكن تحقيق ذلك باحدى الطريقتين التاليتين :

**أولا** – بتدوير المستقيم حول محور يعامد مستوي الاسقاط الأفقي H ويمـر من احدى نقاط المستقيم ( النقطة B ) حتى يتخذ وضعا يوازي مستوي الاسقـــاط الأمامي V فيصبح مستقيما أماميا مسقطه الأمامي يمثل طوله الحقيقي . لأجل ذلك ندور المسقط الأفقي ab حتى يتخذ وضعا $a_1b$ يوازي خط الأرض (الشكل ٣٩٠ آ ) ويتحرك المسقط الأمامي a' أفقيا حتى يتخذ الوضع $a_1'$ الناتج مـن

تقاطع المستقيم الأفقي المار من a' مع خط التداعي المقام من النقطة $a_1$ عموديا على خط الأرض . النقطة $B(b_1b')$ تبقى ثابتة في موقعها لوقوعها على محور التدوير . المسقط $a_1'b'$ يمثل الطول الحقيقي للمستقيم AB .




شكل رقم (٣٩٠)

**ثانيا** – بتغيير مجموعة الاسقاط الأساسية (V/H) بمجموعة مساعدة مكونة من مستوي الاسقاط الأفقي H والمستوي الاسقاطي الأفقي S ( يعامد المستوي H ) وبحيث يكون المستوي S موازيا للمستقيم AB فيكون مسقط المستقيم $a_sb_s$ على هذا المستوي مساويا لطوله الحقيقي ويكون الأثر الأفقي $S_h$ للمستوي ، الذي يمثل محور الاسقاط الجديد H/S ، موازيا للمسقط الأفقي للمستقيم . لأجل ذلك نرسم في موقع مناسب مستقيما يوازي المسقط الأفقي ab للمستقيم AB فيعبر هذا المستقيم عن محور الاسقاط للمجموعة الاسقاطية الجديدة H/S . نقيم من a و b خطي تداع يعامدان محور الاسقاط الجديد ونأخذ عليهما ومن نقطتي تقاطعهما مع المحور (H/S) مقطعين يساويان بعدي a' و b'

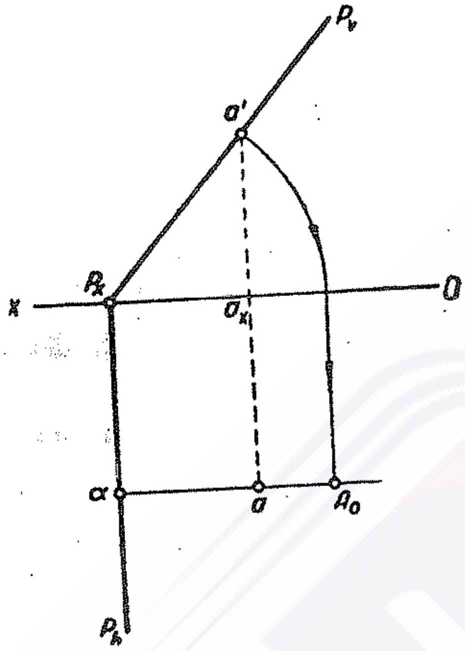
على التوالي عن محور الاسقاط الأساسي (V/H) فنحصل على $a_s$ و $b_s$ مسقطي النقطتين $b_s$ و $a_s$ على المستوي S ( الشكل ٣٩٠ ب ) ، نصل بينهما فنحصل على $a_s b_s$ مسقط المستقيم AB على المستوي S .

٢- حدد الوضع التطابقي للنقطة A ، المنتمية للمستوي P المحدد بأثره الأفقي ، مع مستوي الاسقاط الأفقي H . لاتوجد حاجة لتحديد الأثر الأمامي $P_{v}$ للمستوي ( الشكل ٣٩١ ) .

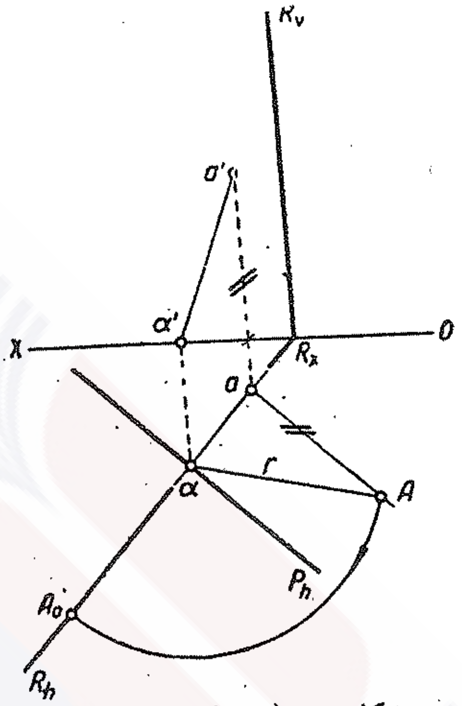
**الحـــل** : تتطابق النقطة A(a,a') مع مستوي الاسقاط الأفقي H اذا طابقنا المستوي P المنتمية اليه مع هذا المستوي . في هذه الحالة يكون محور التدوير الأثر الأفقي $P_h$ للمستوي P . تتحرك النقطة A ضمن مستوي التدوير المتعامد مع محور الدوران ، لذا نمرر من النقطة A(a,a') مستويا اسقاطيا أفقيا R يعامد الأثر الأفقي $P_h$ فيكون مستويا للدوران ويكون مركز الدوران نقطة تقاطع محور الدوران $P_h$ معه $(\alpha,\alpha')$ . بعد ذلك نحدد الطول الحقيقي لنصف قطر الدوران $(a\alpha, a'\alpha')$ بطريقة المثلث قائم الزاوية ، ونرسم من النقطة $\alpha$ قوسا نصف قطره $r = \alpha A$ حتى يتقاطع مع الأثر $R_h$ في النقطة المطلوبه $A_o$ .

٣- حدد الوضع التطابقي للنقطة A ، المنتمية للمستوي الاسقاطي الأمامي P ، مع مستوي الاسقاط الأفقي H ( الشكل ٣٩٢ ) .

**الحـــل** : بما أن $P_x a_x = a\alpha$ فان نصف قطر التدوير للنقطة A(a,a') يساوي $P_x a'$ ( هل تستطيع تعليل ذلك ؟ ) . ولهذا نرسم مستقيما من المسقط الأفقي a يعامد الأثر الأفقي $P_h$ ونأخذ عليه مقطعا $P_x a' = \alpha A_o$ فنحدد الوضع المطلوب للنقطة A .




شكل رقم (٣٩٢)



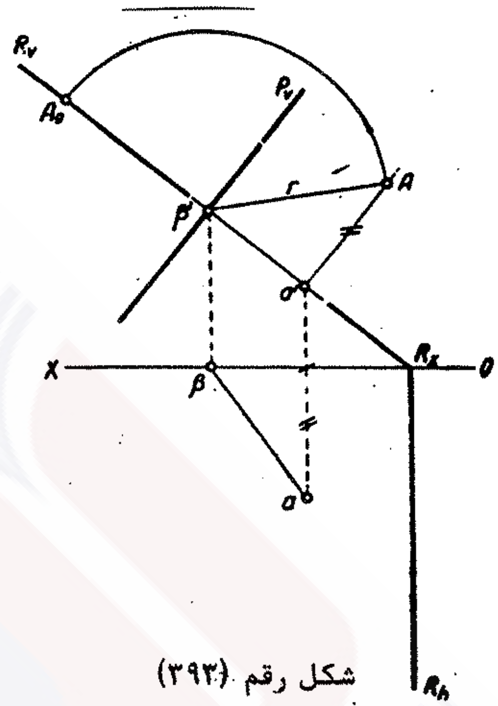

شكل رقم (٣٩١)

يوضح الشكلان ( ٣٩٣ و ٣٩٤ ) طريقة تحديد الوضع التطابقي للنقطة A مع مستوي الاسقاط الأمامي V لحالتين مشابهتين للمثالين أعلاه .

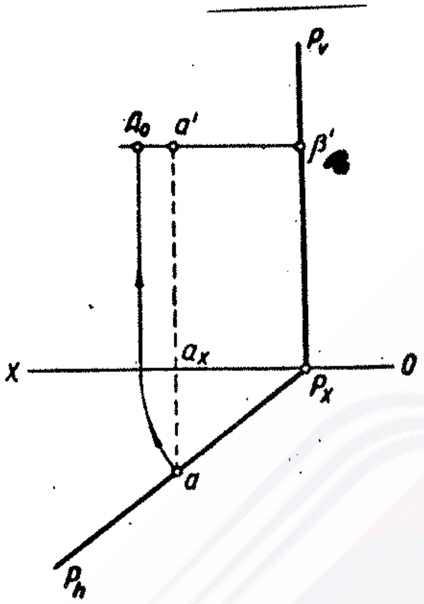
* **استنتاج مهم** : عند مطابقة نقطة A منتمية لمستو مع مستوي الاسقاط ( الأفقي H أو الأمامي V ) يكون :

أ- نصف قطر التدوير هو وتر المثلث قائم الزاوية ، الذي يمثل أحد ضلعيه القائمين بُعد مسقط النقطة ( الأفقي a أو الأمامي 'a ) عن أثر المستوي المنتمية اليه ( $P_v$ أو $P_h$ ) وضلعه الآخر احداثيات المسقط الآخر للنقطة ( الأمامي Z أو الأفقي Y ) .

٢- الوضع التطابقي للنقطة $A_o$ يقع على الأثر ( الأفقي $R_h$ أو الأمامي $R_v$)




شكل رقم (٣٩٣)




شكل رقم (٣٩٤)

لمستوي الدوران وعلى بُعد نصف قطر التدوير عن نقطة تقاطع أثـــري المستويين ( مركز التدوير ) .

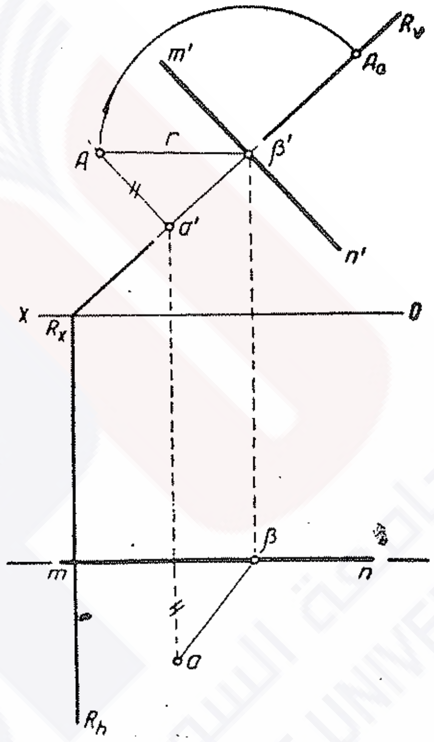
٣ـ في حالات خاصة عندما تكون النقطة منتمية لمستو اسقاطي ( أفـــقي أو أمامي ) نحصل على ($a\alpha = 0$ أو $a'B' = 0$) ويكون نصف قطر التدوير ($r = Z$ أو $r = Y$) .

**٤ـ طابق النقطة A بتدويرها حول المستقيم MN مع المستوي التطابقـــي الأمامي T المار من المستقيم MN ( الشكل ٣٩٥ ) .**

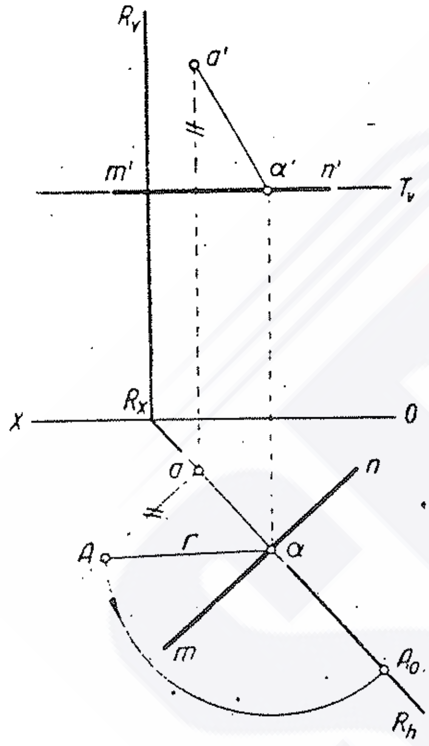
**الحـــل** : نمرر من النقطة $(a,a')$ مستوي اسقاطي أمامي R يعامد محـــور التدوير $(mn,m'n')$ ونحدد مركز التدوير $(\beta,\beta')$ من تقاطع المستوي R مع المستقيم $MN(mn,m'n')$ . نحدد الطول الحقيقي لنصف قطر التدويـــــر $(a\beta,a'\beta')$ ونرسم من نقطة $\beta'$ قوسا نصف قطره r حتى يتقاطع مع الأثـــر

الأمامي $R_V$ في النقطة المطلوبة $A_o$ .

* يوضح الشكل رقم (٣٩٦) تحديد الوضع التطابقي للنقطة A مع المستوي التطابقي الأفقي T المار من المستقيم MN .




شكل رقم (٣٩٥)




شكل رقم(٣٩٦)

* **استنتاج مهم** : نصف قطر التدوير يكون وتر المثلث قائم الزاوية الذي أحد ضلعيه القائمين يمثل المسافة من مسقط النقطة ( الأمامي 'a أو الأفقي a ) حتى المسقط ( الأمامي لجبهة المستوي أو المسقط الأفقي لأثر المستوي ) وضلعه القائم الآخر يساوي المسافة بين مسقط النقطة ( الأفقي أو الأمامي ) حتى المسقط ( الأفقي لجبهة المستوي أو الأمامي لأثر المستوي ) .

٥- طابق المستوي P مع مستوي الاسقاط الأمامي V ( الشكل ٣٩٧ ) .

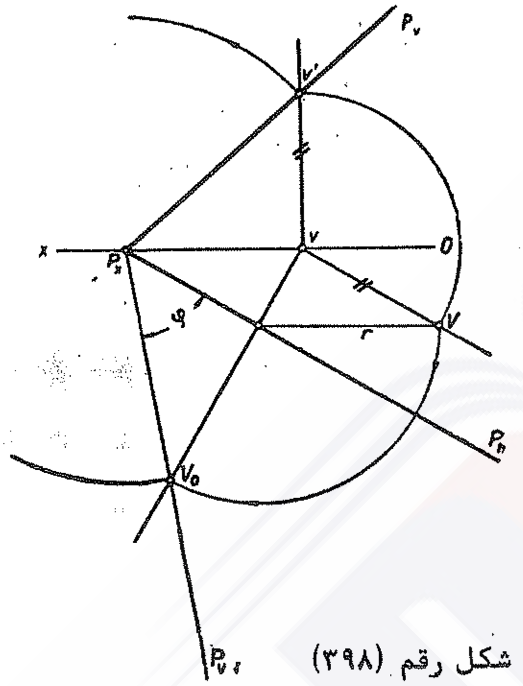
**الحل** : بما أن الأثر الأمامي $P_v$ للمستوي يقع على مستوي الاسقاط الأمامي V لهذا يكفي ايجاد الوضع التطابقي $P_{h1}$ للأثر الأفقي $P_h$ للمستوي مع المستوي V ويتم ذلك بتدوير المستوي حول أثره الأمامي $P_v$ . لهذا الغرض نأخذ نقطة كيفية (h,h') على الأثر الأفقي $P_h$ ونحدد وضعها التطابقي $H_o$ مع المستوي V وفق الطريقة المتبعة في الأمثلة السابقة . نمرر من النقطتين $P_x$ و $H_o$ مستقيما فنحصل على الوضع التطابقي $P_{h1}$ المطلوب للأثر الأفقي . الزاوية $\varphi$ تمثل الزاوية الحقيقية بين أثري المستوي .

من الشكل نلاحظ أن $P_xh = P_xH_o$ وهذا يمكننا من حل المسألة بطريقة أبسط ، تتلخص بالعمليات التالية : نقيم من النقطة 'h عمودا على الأثر $P_v$ ونرسم من النقطة $P_x$ قوسا نصف قطره $P_xh$ فيقطع العمود في النقطتين $H_o$ و $H_{01}$ . نمرر الأثر التطابقي $P_{h1}$ من النقطتين $H_o$ و $P_x$ والأثر التطابقي $P_{h2}$ من $H_{01}$ و $P_x$ .

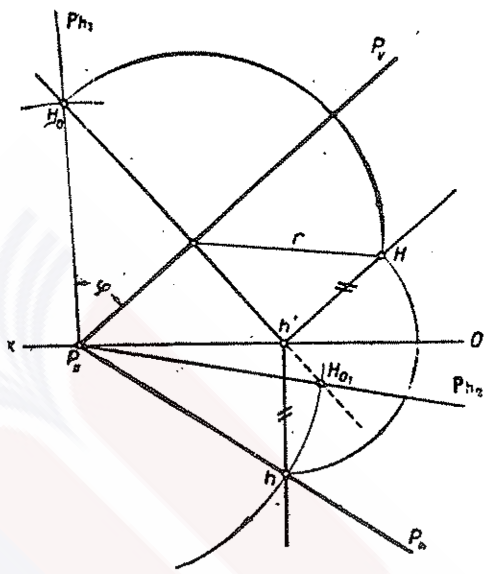
* **ملاحظة** : جميع الأمثلة السابقة في التطابق لها حلان ولكننا اكتفينا بحل واحدة للاختصار .

يوضح الشكل (٣٩٨) تحديد الوضع التطابقي للمستوي P مع مستوي الاسقاط الافقي .

٦- حدد الوضع التطابقي للنقطة A المنتمية للمستوي P مع مستوي الاسقاط الأفقي H ، دون اللجوء لتحديد نصف قطر التدوير (الشكل ٣٩٩).




شكل رقم (٣٩٨)

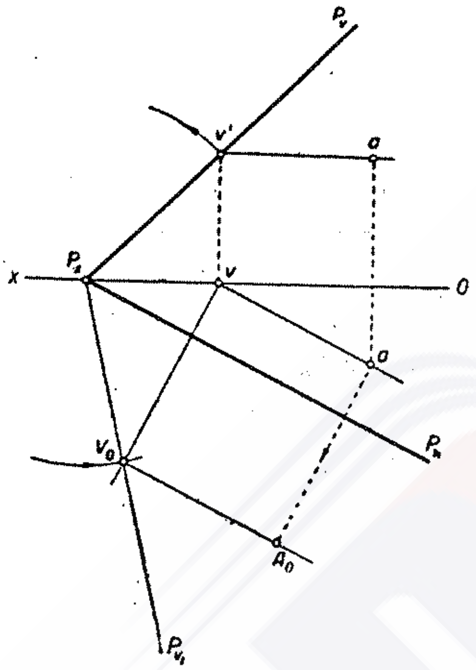



شكل رقم ( ٣٩٧ )

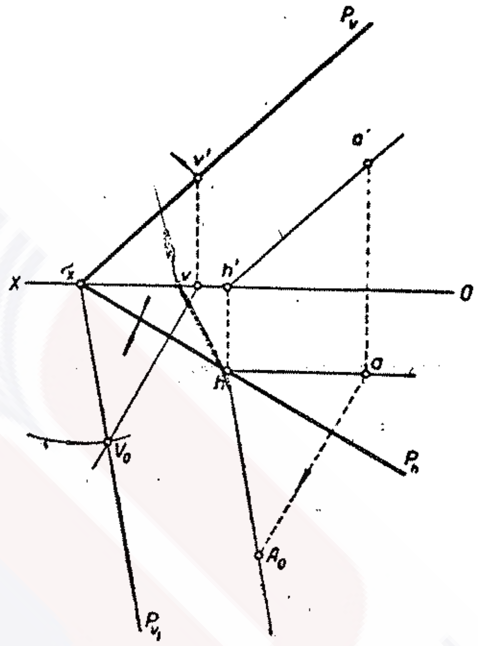
**الحـــل ١** : للتوصل للحل نستخدم جبهة المستوي (AH(ah,a'h' • نحـدد الوضع التطابقي $P_{v1}$ للأثر الأمامي للمستوي ونمرر من النقطة h مستقيما يوازي $P_{v1}$ فنحصل على الوضع التطابقي لجبهة المستوي • ننزل من النقطة a عمودا على $P_h$ فيقطع الوضع التطابقي لجبهة المستوي في النقطـة $A_o$ وهي الوضع التطابقي المطلوب للنقطة A •

**الحـــل ٢** : في هذه الطريقة نستخدم أفق المستوي (AV(av,a'v' •نحـدد الوضع التطابقي $V_o$ للنقطة (v,v') ونمرر منها مستقيما يوازي $P_h$ فنحصل على الوضع التطابقي لأفق المستوي الذي يتقاطع مع العمود النازل من a على $P_h$ في النقطة $A_o$ وهي الوضع التطابقي المطلوب للنقطة A ( الشكل ٤٠٠ ) •

يوضح الشكلان (٤٠١ و ٤٠٢) طريقتي ايجاد الوضع التطابقي للنقطـة A




شكل رقم ( ٤٠٠ )



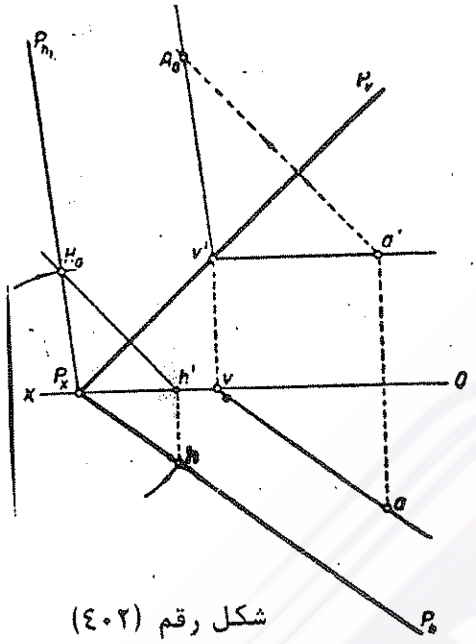

شكل رقم ( ٣٩٩ )

المنتمية للمستوي P مع مستوي الاسقاط الأمامي V ، دون اللجوء لتحديد نصف قطر التدوير ، باستخدام جبهة وأفق المستوي .

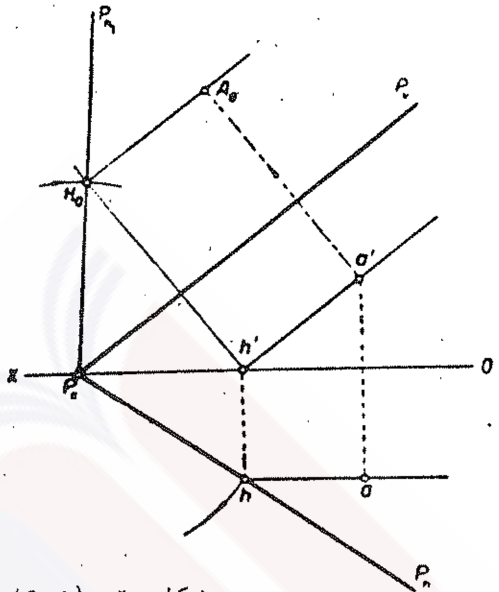
*** استنتاج مهم :**

١ــ عند تطابق مستو مع مستوي الاسقاط الأفقي H فان الوضع التطابقي لأية نقطة منتمية لهذا المستوي يحدد من تقاطع الوضع التطابقي لخطه الرئيسي مع العمود النازل من المسقط الأفقي للنقطة المعنية على الأثر الأفقي للمستوي .

٢ــ عند تطابق مستو مع مستوي الاسقاط الأمامي V فان الوضع التطابقي لأية نقطة منتمية لهذا المستوي يحدد من تقاطع الوضع التطابقي لخطه الرئيسي مع العمود النازل من المسقط الأمامي للنقطة المعنية على الأثر الأمامي للمستوي .



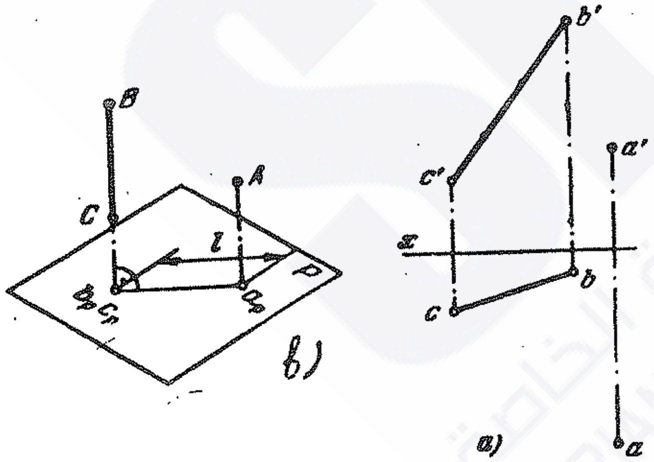
شكل رقم (٤٠٢)



شكل رقم (٤٠١)

٧ـ حدد المسافة بين النقطة A والمستقيم BC ( الشكل ٤٠٣) .

**الحـــل :** تحدد المسافة من نقطة حتى مستقيـــم بمقطع العمود النازل من النقطـة على المستقيـم . واذا كان المستقيم يعامد مستويا ( الشكل ٤٠٣ ب) فان المسافة بين المستقيم والنقطة تساوي المسافـــة بين مسقطي المستقيـــم

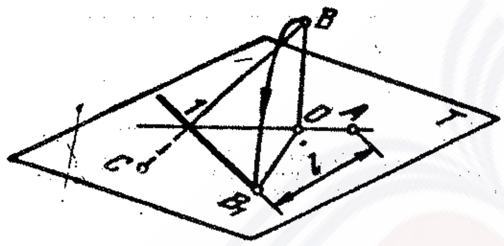


شكل رقم ( ٤٠٣ )

والنقطة على هذا المستوي . هذه الحالة الخـاصة للمستقيم يمكن التوصـــل اليها بعدة طرق ، منها :

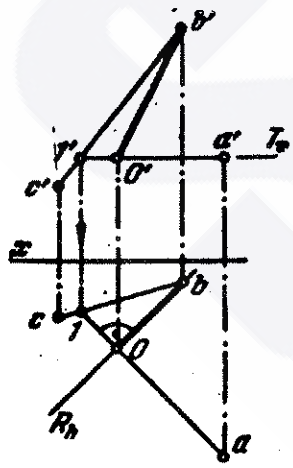
واحدة ويمثل طول مقطع المستقيم الواصل بين $a_2$ و $b_2c_2$ المسافة بين النقطة A والمستقيم BC ٠

* **الطريقة الثانية** : تدوير مستوي حول أفقه :




شكل رقم (٤٠٥ آ)

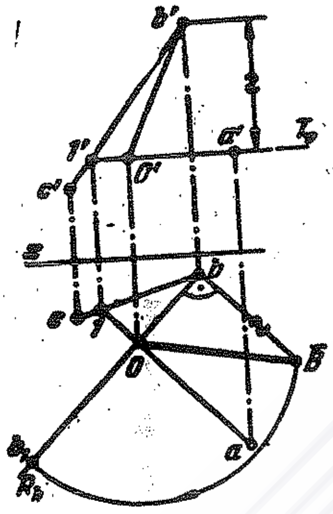
يمكننا اعتبار النقطة A والمستقيم AB محددين لمستو ما T ٠ وعليه يمكننا تدوير هذا المستوي حول أفقه B1 ( الشكل ٤٠٥آ ) حتى يتخذ وضعا يوازي مستوي الاسقاط الأفقي H وبالتالي المساقط الأفقية لجميع العناصر المنتمية للمستوي تعبر عن الأشكال والقياسات الحقيقية لهذه العناصر ومنها بُعد النقطة A عن المستقيم BC ٠




شكل رقم (٤٠٥ ب )

لهذا الغرض نمرر من النقطة a' مستقيما يوازي خط الأرض فيقطع b'c' في النقطة 1' فيكون a'1' المسقط الأمامي لأفق المستوي T ٠ نحدد المسقط الأفقي 1 ونصل a1 فنحصل على المسقط الأفقي لأفق المستوي ( الشكل ٤٠٥ ب )٠

نقوم الآن بتدوير النقطة B حول أفق المستوي فتتحرك ضمن مستو R ( محدد بأثره الأفقي $R_h$ ) يعامد أفق المستوي A1 ويقع مركز الدوران للنقطة B في النقطة 0 الحاصلة من تقاطع $R_h$ مع a1 (الزاوية بينهما قائمة وفق قاعدة تعامد مستقيم مع مستو محدد بآثاره ) ٠



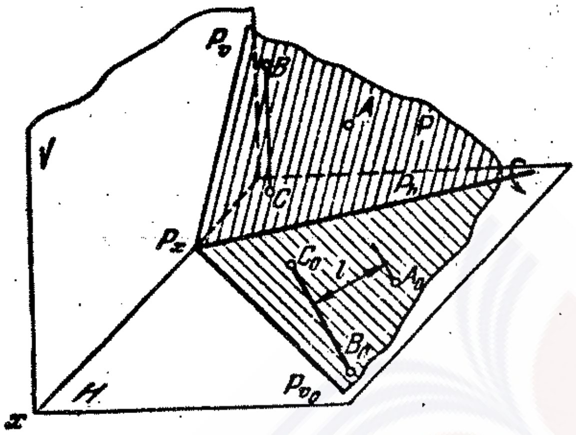

شكل رقم (٤٠٥ ج )

نحدد الآن الطول الحقيقي لنصف قطر التدوير BO (الشكل ٤٠٥ ج ) . يقع المسقط الأفقي $b_1$ للنقطة B في الوضعية المطلوبة ( أي عندما يصبح المستوي T ، المحدد بالنقطة A والمستقيم BC ، موازيا للمستوي H فيصبح أثره الأمامي $T_v$ مطابقا للمسقط الأمامي a'1' لأفقه ) على الأثر الأفقي $R_h$ لمستوي التدوير وعلى بُعد $Ob_1$ من النقطة O . للتوصل لذلك نقيم من b عمودا على bO ونأخد عليه فرق احداثيات O' و b'($\Delta$ Z) فنحدد النقطة $\bar{B}$ ، نصل $O\bar{B}$ فنحصل على وتر المثلث قائم الزاوية $Ob\bar{B}$ الذي يساوي الطول الحقيقي لنصف قطر التدوير OB . نرسم قوسا مركزه O ونصف قطره $O\bar{B}$ فيقطع $R_h$ في النقطة المطلوبة $b_1$ .

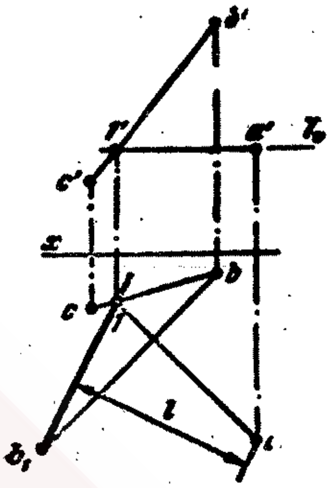
نصل المستقيم $b_1 1$ فنحصل على المسقط الأفقي للمستقيم BC في وضعه الموازي للمستوي H في مستو واحد مع النقطة A ( المستوي T ) وبذلك تكون المسافة بين النقطة a والمستقيم $b_1 1$ ( طول مقطع العمود $\ell$ النازل من a على $b_1 1$ ) هي المسافة المطلوبة ( الشكل ٤٠٦ ) .

* **الطريقة الثالثة** : التطابق :

لو أعتبرنا أن النقطة A والمستقيم BC عناصر منتمية الى المستوي P ( الشكل ٤٠٧ آ ) فان تدوير هذا المستوي حول أثره الأفقي $P_h$ حتى يتطابق مع مستوي الاسقاط الأفقي H يسمح لنا بايجاد المسافة المطلوبة بين




شكل رقم (٤٠٧ آ )

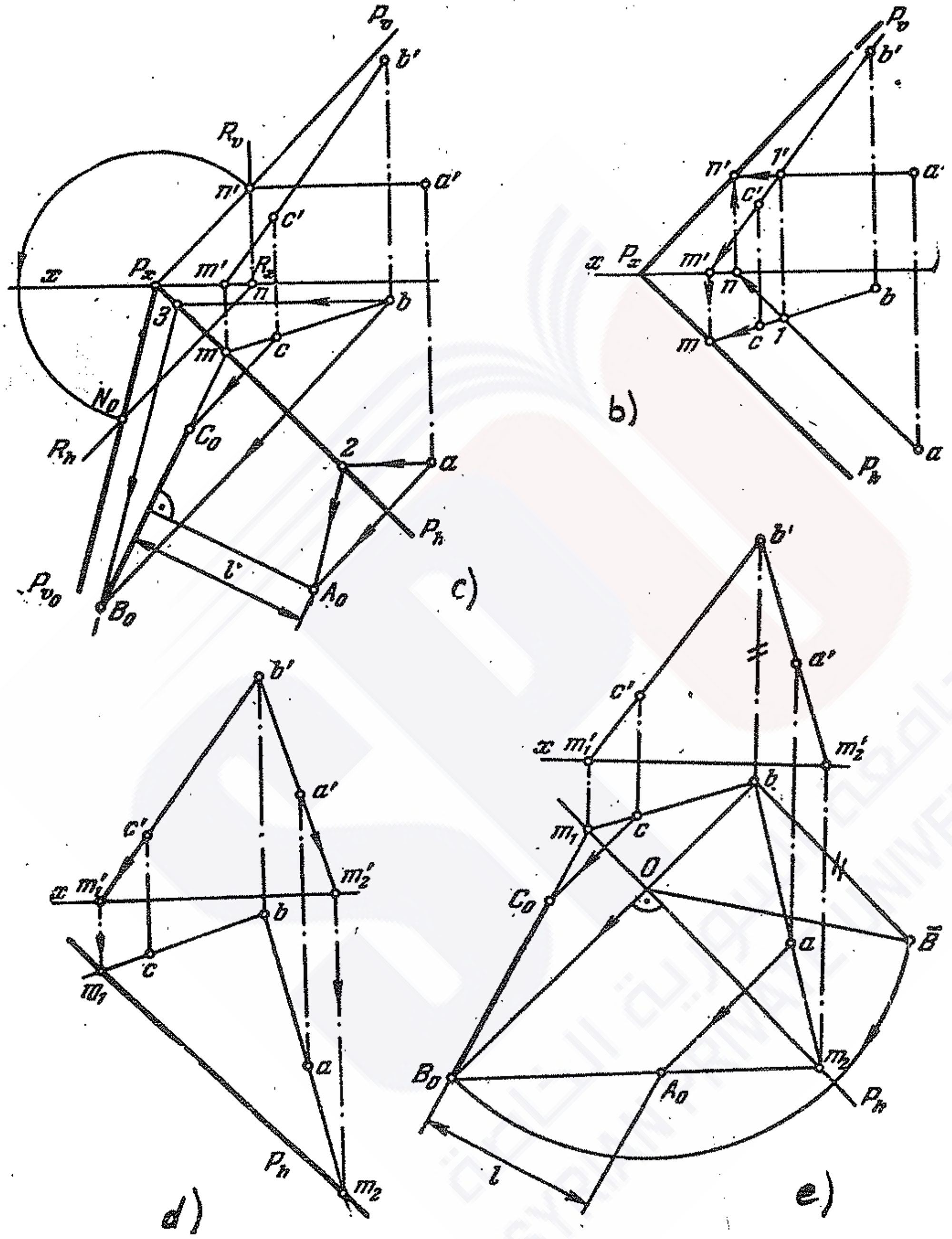



شكل رقم (٤٠٦)

النقطة A والمستقيم BC .

لهذا الغرض ننتقل من تحديد المستوي P بنقطة ومستقيم الى تحديده بالمستقيمين BC و Al المتقاطعين ( الشكل ٤٠٧ ب ) ومن ثم نحدد أثري المستوي $P_h$ و $P_v$ . بعد ذلك نقوم بتدوير المستوي P حول أثره الأفقي $P_h$ حتى يتطابق مع المستوي H فيتخذ عليه أثر المستوي P الأمامي وضعيته الجديدة $P_{vo}$ ( الشكل ٤٠٧ ج ) . نمرر من النقطة a المسقط الأفقي لجبهة المستوي الذي يمر في حالته التطابقية من النقطة 2 الواقعة على $P_h$ موازيا $P_h$ فنحصل من تقاطعه مع العمود النازل من a على $P_{vo}$ على النقطة $A_o$ التي تمثل الوضع التطابقي للنقطة A مع المستوي H . بالطريقة ذاتها نحدد النقطة $B_o$ . المستقيم BC في وضعه التطابقي $B_oC_o$ مع المستوي H يمر من النقطة $B_o$ والنقطة m الأثر الأفقي للمستقيم . وبذلك تكون المسافة بين $A_o$ والمستقيم $B_oC_o$ هي المسافة المطلوبة .

يمكننا التوصل الى الحل المذكور أعلاه بتحديد الأثر الأفقي $P_h$ فقط




شكل رقم ( ٤٠٧ ب و جـ و د و هـ )

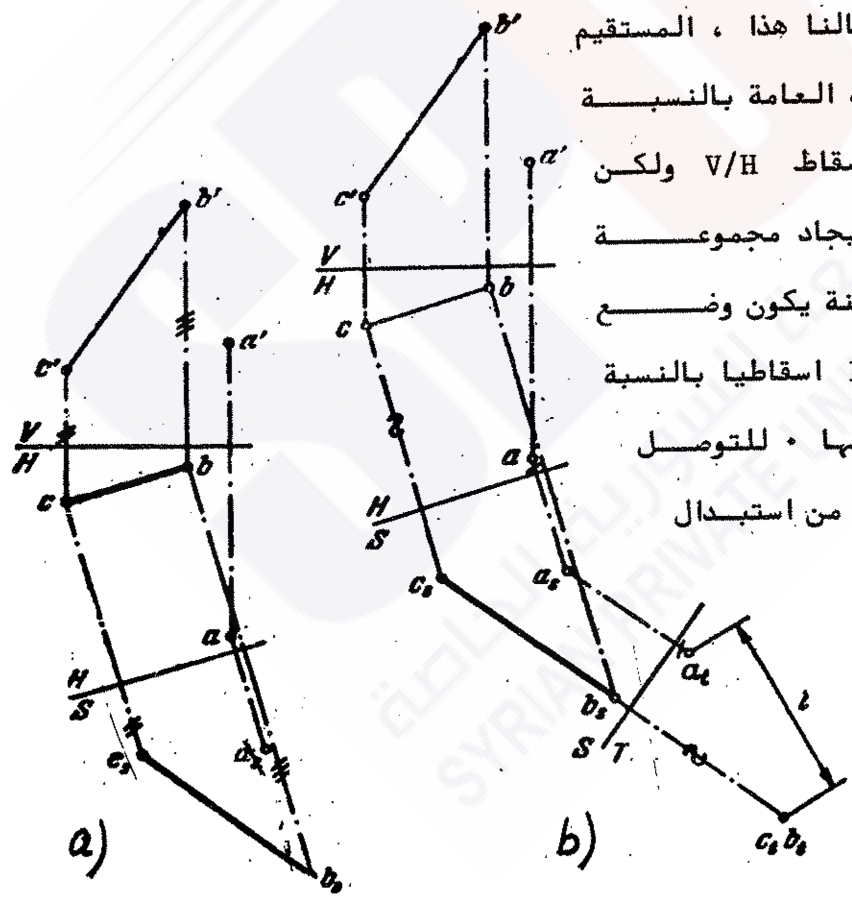
يمكننا التوصل الى الحل المذكور أعلاه بتحديد الأثر الأفقي $P_h$ فقط ( الشكل ٤٠٧ د ) ومن ثم نجري العمليات المتبعة في الطريقة الثانية

( التدوير حول أفق المستوي ) باعتبار أن الاثر الافقي $P_h$ يمثل أحد آفـــاق المستوي P ( الشكل ٤٠٧ هـ ) .

* **الطريقة الرابعة** : تغيير مستويات الاسقاط :

كما ذكرنا في مقدمة حل هذا المثال فان المسافة بين نقطة ومستقيـــم يمكن تحديدها مباشرة اذا كان المستقيم اسقاطيا ، أي عموديا على مستـــوي الاسقاط ، ويمثل البُعـد بين مسقطي النقطة والمستقيم على المستـــــوي المتعامد معه ( الشكل ٤٠٤ ب ) المسافة المطلوبة .

في مثالنا هذا ، المستقيم في حالته العامة بالنسبـــة لمجموعة الاسقاط V/H ولكـــن من الممكن ايجاد مجموعـــــة اسقاطية معينة يكون وضـــــع المستقيم BC اسقاطيا بالنسبة لأحد مستوياتها . للتوصـــل الى ذلك لابد من استبـدال المجموعة الأساسيـة ( V/H ) بمجموعـــة جديـــدة تماما (S/T)

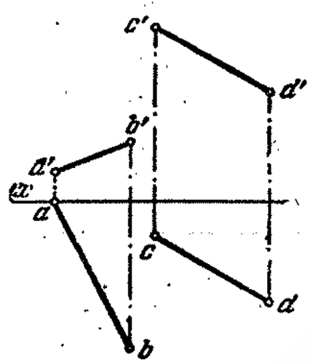



شكل رقم (٤٠٨)

على مرحلتين ٠ ففي المرحلة الأولى ( الشكل ٤٠٨ آ ) نستبدل مستوي الاسقاط الأمامي V بمستو S يعامد مستوي الاسقاط الأفقي H ( وبذلك تصبح لدينا مجموعة اسقاطية جديدة H/S ) ويكون موازيا للمستقيم BC في الوقت ذاته ٠ الفصل المشترك بين المستويين H و S يمثل محور الاسقاط للمجموعة الاسقاطية الجديدة H/S ٠ لذلك وحسب قواعد اسقاط المستقيم الموازي لأحد مستويات الاسقاط فان المسقط الأفقي bc يجب أن يوازي محور الاسقاط الجديد H/S ٠ على هذا الأساس نرسم في موقع مناسب مستقيما يوازي bc فيكون هذا المستقيم محور الاسقاط الجديد H/S ٠ نقيم الآن خطوط تداع تعامد المحور H/S من النقاط a و b و c ونأخذ عليها من المحور H/S مقاطع مساوية لأبعاد النقاط a' و b' و c' عن محور المجموعة الاسقاطية الأساسية V/H على التوالي فنحدد $a_s$ و $b_s$ و $c_s$ مساقط النقاط A و B و C على مستوي الاسقاط الجديد S والتي يمثل فيها المستقيم $b_sc_s$ الطول الحقيقي للمستقيم BC ٠

في المرحلة الثانية نستبدل مستوي الاسقاط الأفقي H بمستو آخر T يعامد المستوي S ( نحصل بذلك على مجموعة اسقاطية جديدة S/T لاعلاقة لها بالمجموعة الأساسية ) ويعامد المستقيم BC في الوقت ذاته ( الشكل ٤٠٨ ب ) ولذلك فان مسقط المستقيم $b_sc_s$ في المستوي S يعامد محور الاسقاط الجديد S/T ٠ على هذا الأساس نرسم في موقع مناسب مستقيما يعامد $b_sc_s$ فنحصل على محور الاسقاط الجديد S/T ٠ نرسم من $a_s$ و $b_s$ و $c_s$ خطوط تداع تعامد المحور S/T ونأخذ عليها من المحور S/T مقاطع مساوية لبُعد a و b و c عن محور H/S فنحصل على $a_t$ و $b_t$ و $c_t$ ( $b_t$ و $c_t$ يتطابقان في نقطة واحدة ) وبذلك يحدد طول مقطع المستقيم

الواصل بين $a_t$ و $b_tc_t$ المسافة المطلوبة.




شكل رقم (٤٠٩)

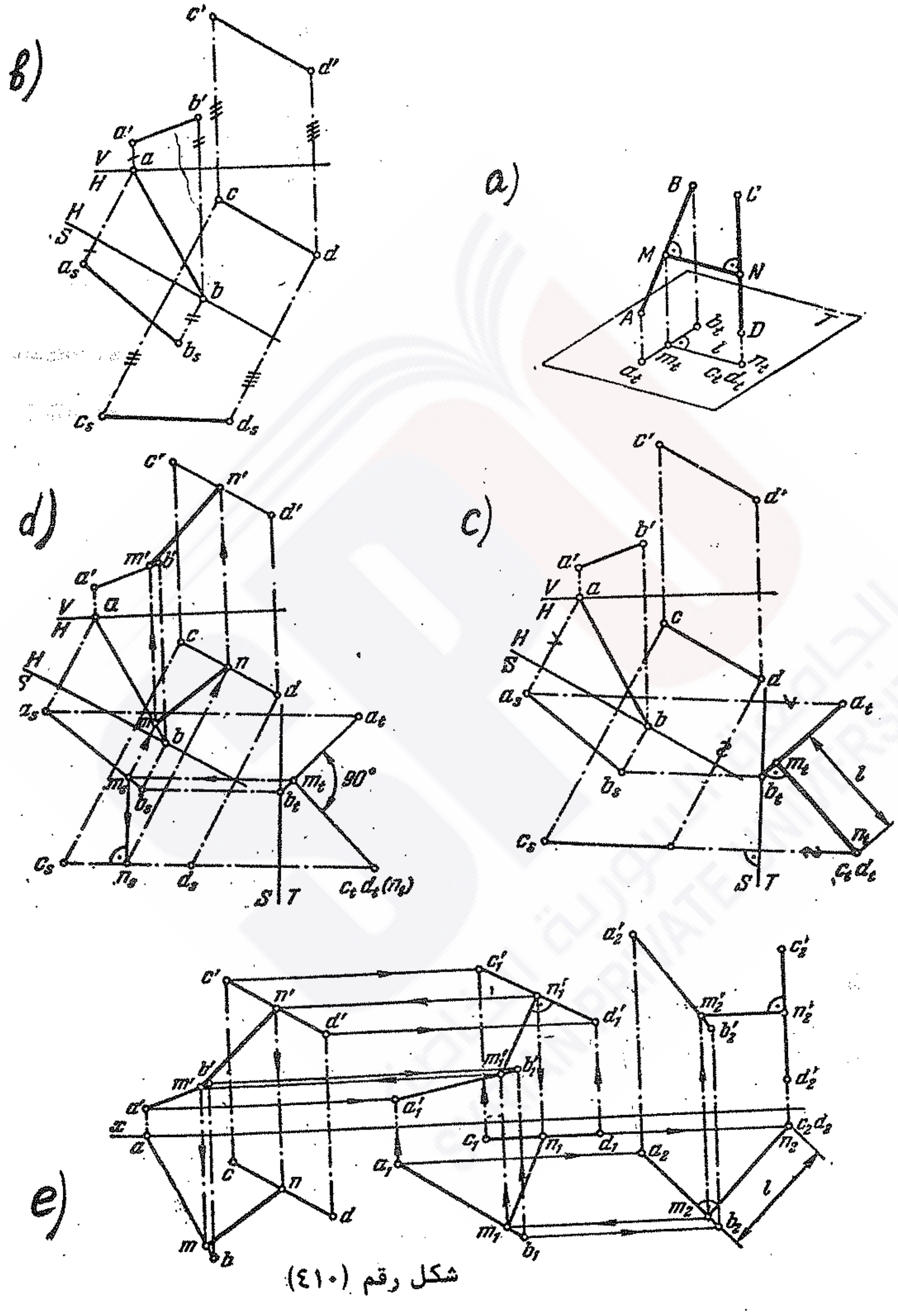
**٨ـ حدد المسافة بين المستقيمين المتخالفين** AB و CD ( الشكل ٤٠٩ ) وارسم مساقط العمود عليهما .

**الحـــل :** المسافة بين المستقيمين المتخالفين تساوي طول مقطع العمود عليهما والمحصـــور بينهما ( الشكل ٤١٠ آ ) . ومن الواضح أنه اذا كان أحد هذين المستقيمين يعامد مستويا ما ( ليكن T ) فان العمود عليهمـــا يكون موازيا لهذا المستوي وبالتالي فان مسقطه على هذا المستوي يعبر عـــن طوله الحقيقي ، وحسب قاعدة اسقاط الزاوية القائمة التي أحد أضلاعها يوازي مستوي الاسقاط فان مسقط هذا العمود والمستقيم المتعامد معه على المستوي T يكون زاوية قائمة أيضا .

المستقيمان AB و CD في المجموعة الاسقاطية V/H في حالتهمـــا العامة ، ولجعل أحدهما في الحالة الخاصة المطلوبة نستخدم احدى الطريقتين التاليتين :

* **الطريقة الأولى** : استخدام مجاميع الاسقاط المساعدة كما في المثال السابق، التوصل الى الحل المطلوب يتطلب القيام بعملية تغيير مجموعة الاســـقـــاط الأساسية V/H بمجموعة أخرى S/T ويتم ذلك على مرحلتين :

ـ **الأولى** : نقوم باستبدال المستوي V بمستو S يعامد المستوي H ويوازي المستقيم CD ولذلك يكون محور الاسقاط الجديد H/S موازيا للمسقـــط الأفقي cd للمستقيم CD ونحدد المساقط الجديدة $c_sd_s$ و $a_sb_s$ فـــي




شكل رقم (٤١٠)

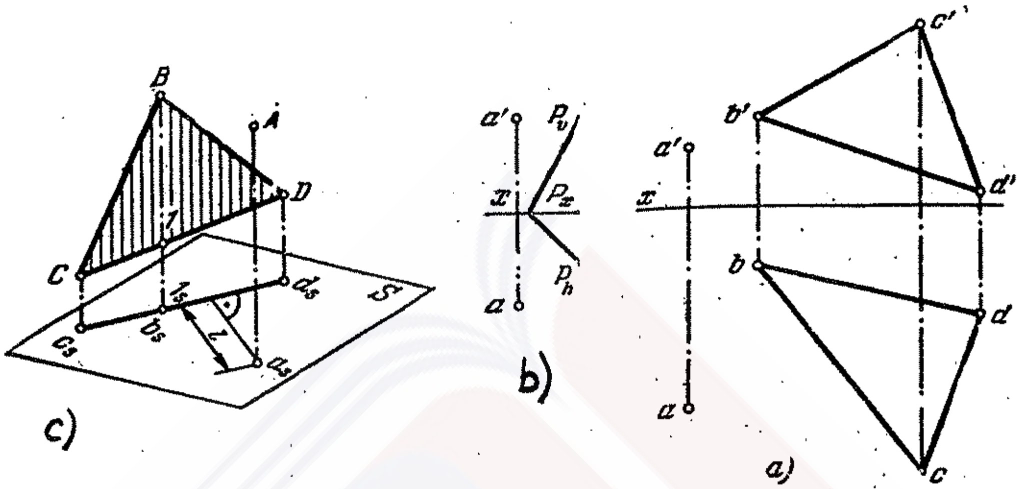
المستوي S بالطريقة ذاتها التي استخدمناها في المثال السابق ( الشكل ٤١٠ ب ) ٠

ـ **المرحلة الثانية :** نقوم باستبدال المستوي H بمستو T يعامد المستوي S والمستقيم CD في الوقت نفسه ، ولذلك يكون محور الاسقاط الجديد S/T ( الشكل ٤١٠ جـ ) عموديا على مسقط المستقيم $c_sd_s$ ٠ نرسم من $a_sb_s$ و $c_sd_s$ خطوط تداع تعامد S/T ونأخذ عليها من هذا المحور مقاطع تساوي بعد a و b و c و d عن محور الاسقاط H/S فنحدد المسقطين $a_tb_t$ و $c_td_t$ وهذا الأخير يتمركز في نقطة واحدة لأن المستقيم CD يعامد المستوي T ٠ بما أن مقطع المستقيم MN المتعامد مع المستقيمين CD و AB يوازي مستوي الاسقاط الجديد T لذلك مسقطه $m_tn_t$ يمر من النقطة $c_td_t$ ويعامد $a_tb_t$ ويمثل الطول الحقيقي للمسافة بين المستقيمين CD و AB ٠

لرسم مساقط MN في مجموعة الاسقاط الأساسية (mn,m'n') ( الشكل ٤١٠ د ) نقوم بعملية ارجاعية فنسقط $m_t$ على $a_sb_s$ فنحصل على $m_s$ ، وبما أن المستقيم MN يوازي المستوي S فان مسقط الزاوية القائمة الحاصلة من تعامده مع MN على المستوي S يكون زاوية قائمة أيضا ٠ لذلك من $m_s$ نقيم عمودا على $c_sd_s$ فنحصل على النقطة $n_s$ ٠ نقوم الآن باسقاط $m_s$ و $n_s$ على ab و cd فنحصل على المسقطين الأفقيين m و n للنقطتين M و N ٠ نقوم باسقاط m و n على a'b' و c'd' فنحصل على المسقطين الأماميين m' و n' ٠ نصل mn و m'n' فنحصل على المسقطين المطلوبين ٠

* **الطريقة الثانية : التدوير الانتقالي :**

في هذه الطريقة نقوم أولا بتدوير المجموعة حتى يصبح المستقيم CD مستقيما أماميا فيكون مسقطه الأفقي موازيا لخط الأرض • لذلك نختار موقعا مناسبا ونحدد عليه النقطة $c_1$ ونرسم مقطعا يساوي cd ويوازي خط الأرض فنحصل على $c_1d_1$ • عند التدوير حول محور يعامد المستوي H يبقى المسقط الأفقي محافظا على قياساته وأبعاده وشكله • لذلك تأخذ الأبعاد ذاتها بين النقاط c و d و a و b فنحدد $a_1$ و $b_1$ ( الشكل ٤١٠ هـ نصل بينهما فنحصل على المسقط الأفقي $a_1b_1$ للمستقيم AB في وضعيته الجديدة • نقيم خطوط تداع من $a_1$ و $b_1$ و $c_1$ و $d_1$ فنحصل من تقاطعهما مع المستقيمات الأفقية المارة بالنقاط 'a و 'b و 'c و 'd على المساقط الأمامية الجديدة للمستقيمين $a'_1b'_1$ و $c'_1d'_1$ • نقوم الآن بتدوير آخر للمجموعة حول محور يعامد المستوي V حتى يصبح المستقيم CD اسقاطيا أفقيا ويكون مسقطه الأمامي $c'_2d'_2$ عموديا على خط الأرض ويحافظ على طول مساو لـ $c'_1d'_1$ ، ووفق القاعدة السابقة نفسها نحدد $a'_2b'_2$ ومن ثم نقيم خطوط تداع تعامد خط الأرض فتقطع الخطوط الأفقية الماره من $a_1$ و $b_1$ و $c_1$ و $d_1$ في $a_2$ و $b_2$ و $c_2$ و $d_2$ وتتمركز $c_2$ و $d_2$ في نقطة واحدة • حسب قاعدة اسقاط الزاوية القائمة التي أحد أضلاعها يوازي مستوي الاسقاط، وبما أن MN في وضعيته الأخيرة يوازي المستوي H فان المسقطين $m_2n_2$ و $a_2b_2$ يكونان متعامدين لذلك من $c_2d_2$ نقيم عمودا على $m_2n_2$ فيقطعه في $a_2b_2$ فيقطعه في $m_2$ • نحدد $m'_2$ ومنها نرسم مستقيما يعامد $m'_2n'_2$ فيقطعه $c'_2d'_2$ في $n'_2$ ، مقطع العمود $m_2n_2$ يمثل المسافة بين المستقيمين CD و AB • لرسم مساقط هذا العمود في المجموعة الاسقاطية الأساسية V/H نقوم بعمليات ارجاع لمساقط النقطتين M و N • لذلك نمرر من $m_2$ مستقيما أفقيا يقطع $a_1b_1$ في $m_1$ ونقيم منه




شكل رقم (٤١١)

خط تداع يعامد خط الأرض يقطع $a_1'b_1'$ في $m_1'$ ، وبما أن CD في هـــذه الوضعية يوازي المستوي V فان المسقطين $c_1'd_1'$ و $m_1'n_1'$ يكونان متعامدين. لذلك نرسم من $m_1'$ مستقيما يعامد $c_1'd_1'$ فيقطعه في $n_1'$ ( الشكل ٤١٠ د). نحدد مسقطها الأفقي $n_1$ على $c_1d_1$ . من $n_1'$ و $m_1'$ نمد مستقيميـــن أفقيين فيقطعـان c'd' و a'b' في n' و m' المسقطين الأماميين للنقطتين N و M في مجموعة الاسقاط الرئيسية V/H . نحدد مسقطيهما الأفقييـن n و m على cd و ab . نصل mn و m'n' فنحصل على المسقطين المطلوبين.

**٩ـ** حدد المسافة من النقطة A حتى المستوي P المحدد :

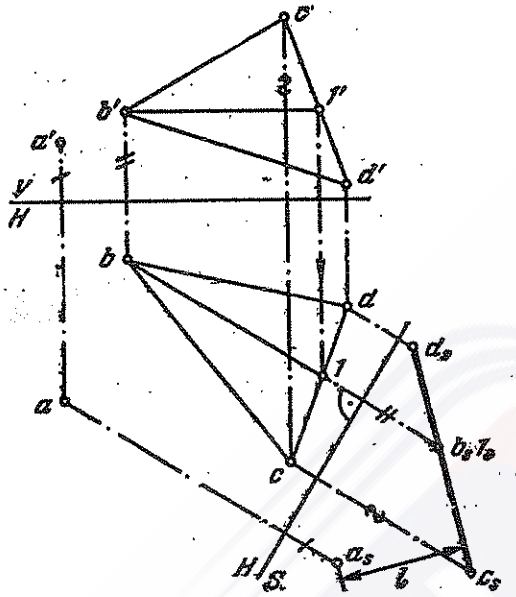
آ ـ بالمثلث BCD ( الشكل ٤١١ آ )، ب ـ بأثريه ( الشكل ٤١١ ب ) .

**الحـــل** : كما هو معلوم ، المسافة بين نقطة ومستو تساوي طول مقطـــع العمود النازل من النقطة على المستوي . ويمكن الحصول على القيمـــة الحقيقية لهذه المسافة في التعبير الاسقاطي اذا كان المستوي المعني يعامد

مستوي الاسقاط ( الشكل ٤١١ج ).

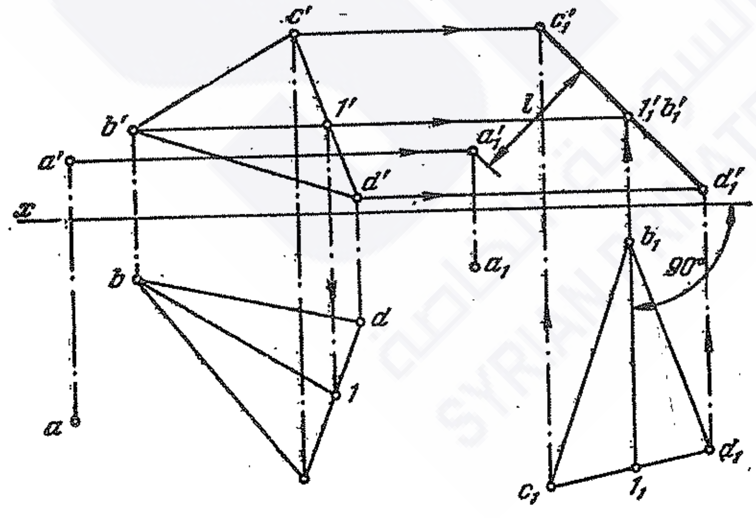
يمكن الحصول على هذه الوضعية الخاصة للمستوي بطريقة استبدال مجاميع الاسقاط أو بطريقة التدوير الانتقالي .

لكي يكون مستوي عموديا على مستو آخر لابد أن يكون أحد مستقيمات المستوي الأول عموديا على المستوي الثاني .




شكل رقم ( ٤١٢ آ )

للتوصل الى هذه الوضعية الاسقاطيه للمستوي P نقوم بالخطوات التالية :




شكل رقم ( ٤١٢ ب )

**أولا – في حالة المستوي P محدد بالمثلث BCD :**

١– نرسم أفق المستوي Bl وذلك برسم مستقيم يوازي خط الأرض من النقطة b' فيقطع c'd' في النقطة 1' . نحدد مسقطها الأفقي 1 على cd ونصل bl فنحصل على المسقط الأفقي لأفق المستوي ( الشكلان ٤١٢ آ و ب ) .

٢– عند استخدام مجاميع الاسقاط المساعدة نقوم باستبدال مستوي الاسقاط الأمامي V بمستو S يعامد المستوي H ومستوي المثلث BCD فيتعامد أثره الأفقي ( الذي يمثل محور الاسقاط الجديد H/S ) مع المسقط الأفقي bl لأفق المثلث ( الشكل ٤١٢ آ ) . نسقط المثلث على المستوي S وفق القواعد المتبعة في المثال السابق فنحصل على المسقط $b_sc_sd_s$ المنطبق على أثر المثلث ( يقع على خط مستقيم واحد ) ونسقط النقطة A على هذا المستوي فنحصل على $a_s$ . مقطع العمود $\ell$ المقام من $a_s$ على $b_sc_sd_s$ يمثل بُعد النقطة A عن المستوي P المحدد بالمثلث BCD .

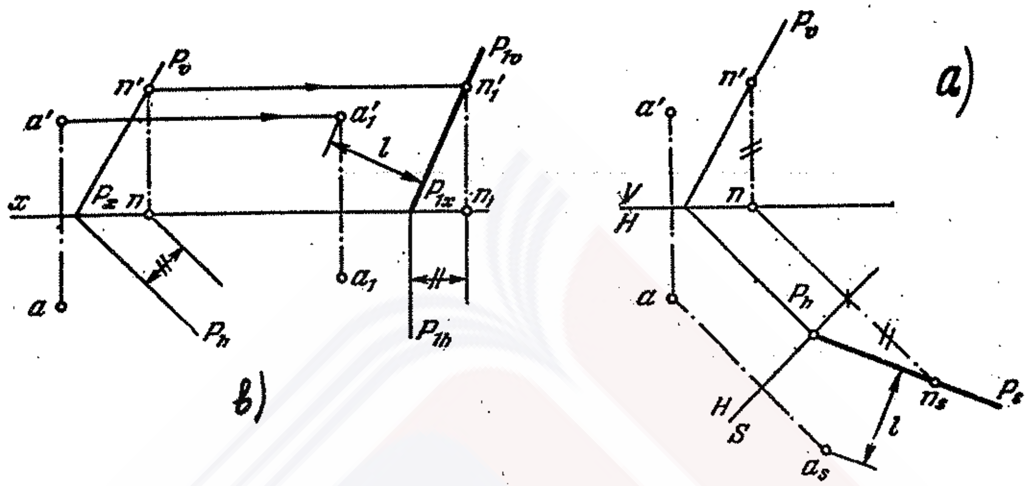
٣– في حالة التدوير الانتقالي نختار في موقع مناسب تحت خط الأرض النقطة $b_1$ ونرسم منها مستقيما يعامد خط الأرض ونأخذ عليه مقطعا يساوي bl فنحدد نقطة $l_1$ ونحدد النقاط $a_1$ و $c_1$ و $d_1$ (الشكل ٤١٢ ب ) استنادا الى أن الأبعاد في المسقط الأفقي عند التدوير حول محور يعامد مستوي الاسقاط الأفقي H تبقى محافظة على قيمها بعد التدوير . نرسم خطوط تداعي تعامد خط الأرض من $a_1$ و $b_1$ و $c_1$ و $d_1$ . تتقاطع مع المستقيمات الأفقية المارة من a' و b' و c' و d' في النقاط $a'_1$ و $b'_1$ و $c'_1$ و $d'_1$ المساقط الأمامية لعناصر

المجموعة بعد التدوير . ونلاحظ أن $b_1'c_1'd_1'$ تقع على خط مستقيم واحد يمثل الأثر الأمامي للمثلث BCD في وضعه الاسقاطي الجديد مقطع العمود النازل من $a_1'$ على $b_1'c_1'd_1'$ يمثل البعد الحقيقي للنقطة A عن المستوي P المحدد بالمثلث BCD .

**ثانيا – في حالة المستوي P محدد بأثريه $P_h$ و $P_v$ :**

١– عند استخدام مجاميع الاسقاط المساعدة ننطلق من قاعدة تعامد المستويات المحددة بآثارها والتي تنص على أن الآثار المتماثلة للمستويات المتعامدة تتعامد أيضا . لذلك فان أثر المستوي الأفقي ( محور الاسقاط الجديد H/S ) يعامد الأثر الأفقي $P_h$ للمستوي P . لهذا نختار نقطة مناسبة على الأثر الأفقي $P_h$ ونرسم منها مستقيما يعامده فنحصل على محور الاسقاط الجديد H/S ، وتمثل هذه النقطة نقطة التقاء الأثرين $P_h$ و $P_s$ للمستوي P في المجموعة الاسقاطية الجديدة التي تم استبدال مستوي الاسقاط الأمامي V بمستوS يعامد المستوي H والمستوي P في الوقت ذاته ( الشكل ٤١٣ آ ) .

لرسم الأثر $P_s$ نحتاج نقطة أخرى تنتمي اليه . لذلك نأخذ نقطة واقعة على $P_v$ ($N(n,n')$) ونحدد مسقطها $n_s$ على المستوي S بأن نأخذ من المحور H/S مقطعا يساوي المقطع $nn'$ على خط التداعي المقام من n عموديا على المحور H/S فنحدد $n_s$ . نمرر من $n_s$ ونقطة تقاطع $P_h$ مع المحور H/S مستقيما فنحصل على الأثر $P_s$ للمستوي P المتعامد مع مستوي الاسقاط الجديد S . نحدد كذلك مسقط $a_s$ النقطة A على المستوي S بالطريقة ذاتها . طول مقطع




شكل رقم (٤١٣)

العمود النازل من $a_s$ على $P_s$ يمثل بُعد النقطة A الحقيقي عن المستوي P .

٢ـ عند استخدام التدوير الانتقالي نأخذ نقطة N(n,n') واقعة على الأثر الأمامي $P_v$ ونحدد مسقطيها n' على $P_v$ و n على خط الأرض . من n نرسم المسقط الأفقي لأفق المستوي المار من N فيكون هذا المسقط موازيا للأثر $P_h$ . من موقع مناسب على خط الأرض OX نرسم مستقيما يعامد خط الأرض فيمثل هذا المستقيم المسقط الأفقي لأفق المستوي P المار من النقطة N في الوضعية الجديدة للمستوي P المتعامدة مع المستوي V نتيجة تدويره حول محور يعامد مستوي الاسقاط الأفقي H، ولذلك تبقى الأبعاد بين عناصر المسقط الأفقي ثابتة وعلى أساس ذلك يمكننا تحديد $P_{1h}$ فنرسم على بُعد H من المسقط الأفقي لأفق المستوي في وضعيته الجديدة مستقيما يوازيه فنحصل على $P_{1h}$ . ووفق

الأسس ذاتها نحدد $a_1$ المسقط الأفقي للنقطة A في الوضعية الجديدة للمجموعة ( الشكل ٤١٣ ب ) • نقيم خطوط تداع من $a_1$ و $n_1$ تعامد خط الأرض OX فتتقاطع مع الخطوط الأفقية المرسومة من $a'$ و $n'$ في النقطتين $a'_1$ و $n'_1$ وهذه الأخيرة تقع على الأثر الأمامي $P_{1v}$ للمستوي في وضعيته الجديدة • لذلك نصل $P_{1x}$ و $n'_1$ فنحصل على $P_{1v}$ وبذلك يكون مقطع العمود النازل من $a'_1$ على $P_{1v}$ هو البعد الحقيقي للنقطة A عن المستوي P •

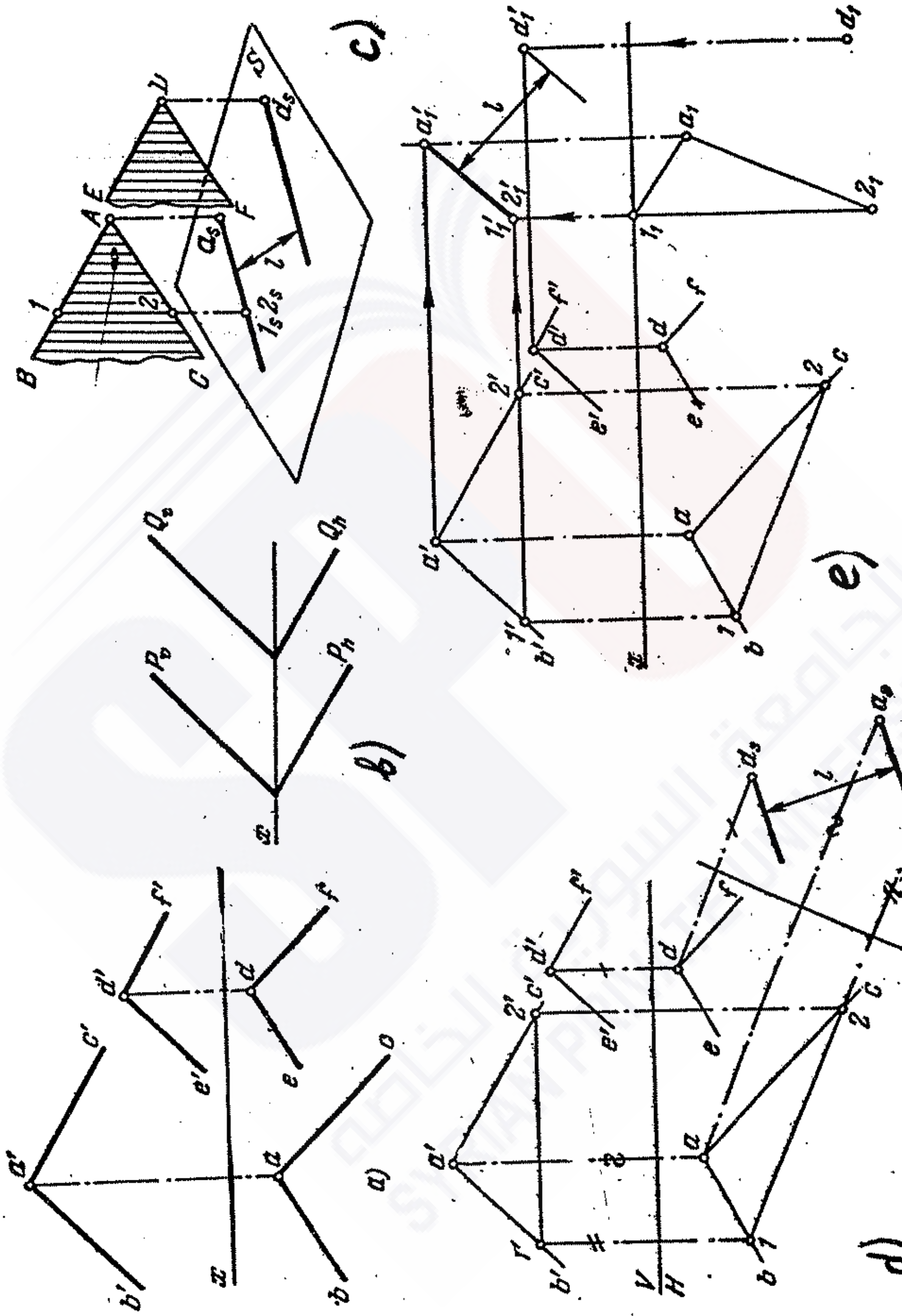
١٠ـ حدد المسافة بين المستويين المتوازيين :

آ ـ اذا كان المستوي P محددا بالمستقيمين AB و AC والمستوي Q محددا بالمستقيمين DE و DF ( الشكل ٤١٤ آ ) •

ب ـ اذا كان المستويان محددين بآثارهما ( الشكل ٤١٤ ب ) •

**الحل** : المسافة بين مستويين متوازيين تساوي طول مقطع المستقيم المحصور بينهما والعمودي عليهما $\ell$ ( الشكل ٤١٤ ج ) • هذا العمود يتحدد بأثريه على المستويين ، لذلك يمكننا النظر الى المسألة باعتبارها مسألة ايجاد المسافة بين نقطة ( واقعة على المستوي الأول ) ومستو ( هو المستوي الثاني ) • وبما أن المستويين في حالتهما العامة ، كما هو واضح من معطيات السؤال ، فان ايجاد المسافة بينهما يتم ، كما في المثال السابق ، باحدى الطريقتين السابقتين ، أي بطريقة استبدال مجاميع الاسقاط، أو بطريقة التدوير لجعل المستويين في وضع اسقاطي • لذلك نتبع الخطوات التالية :

آ ـ المستويان P و Q محددان بالمستقيمات AB و AC و DE و DF •




شكل رقم ( ٤١٣ )

١ـ لكي يكون المستوي اسقاطيا ( عموديا على مستوي الاسقاط ) يجب أن يحتوي على مستقيم يعامد مستوي الاسقاط المعني . لذلك نرسم أفق المستوي 12 وذلك بأن نأخذ نقطة 1' على a'b' ونرسم منها مستقيما يوازي خط الأرض فيقطع a'c' في 2' . نحدد المسقط الأفقي 12 لأفق المستوي .

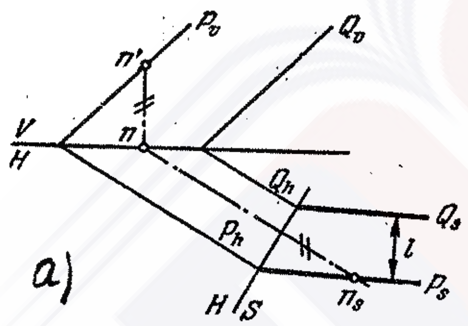
٢ـ عند استخدام مجاميع الاسقاط المساعدة نقوم باستبدال مستوي الاسقاط الأمامي V بمستو S يعامد المستوي H والمستويين P و Q في الوقت ذاته ، لذلك يكون أثره الأفقي ( محور الاسقاط الجديد H/S ) عموديا على 12 المسقط الأفقي لأفق المستوي ( الشكل ٤١٤ د ) ونقوم باسقاط المستقيمين AB و AC على المستوي S وفق الأسس المتبعة في الأمثلة السابقة فنحصل على $a_sb_sc_s$ المنطبقين على أثر المستوي $P_s$ ، أي تقع جميعها على استقامة واحدة . أما بالنسبة للمستوي Q فنكتفي بايجاد المسقط $d_s$ للنقطة D بالطريقة ذاتها ، وبما أن المستويين P و Q متوازيان فان آثارهما المتماثلة تتوازى أيضا ، ولذلك من $d_s$ نرسم مستقيما يوازي $a_sb_sc_s$ فيمثل أثر المستوي $Q_s$ على المستوي S . المسافة بين المستويين تساوي طول مقطع المستقيم $\ell$ العمودي على كلا الأثرين $P_s$ و $Q_s$ .

٣ـ عند استخدام طريقة التدوير الانتقالي ، نختار موقع مناسب للنقطة $1_1$ ( في هذا المثال اخترناه على خط الأرض OX ) ومنها نرسم مستقيما $1_1-2_1$ يعامد خط الأرض وطوله يساوي طول 2-1 ونحدد وفق أسس التدوير موقع النقطتين $a_1$ و $d_1$ ( كما في الفقرة السابقة نكتفي بتحديد نقطة واحدة من المستوي Q ) وبعد ذلك نحدد المساقط

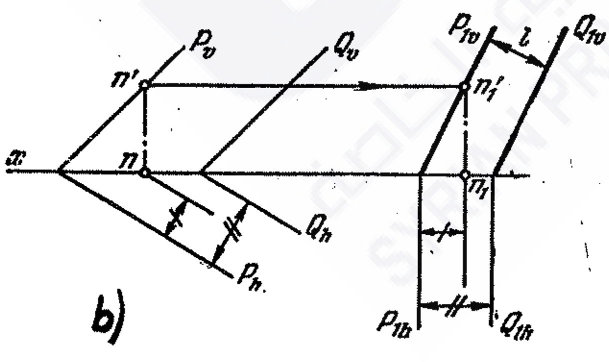
الأمامية لهذه النقاط ( الشكل ٤١٤ هـ ) فتقع $1'_1$ و $2'_1$ و $a'_1$ على استقامة واحدة ويكون مقطع العمود النازل من $d'_1$ على $1'_1 2'_1 1'_1$ هو المسافة الحقيقية بين المستويين P و Q ·

ب ـ المستويان P و Q محددان بآثارهما :

١ـ عند استخدام مجاميع الاسقاط المساعدة نستبدل المستوي V بمستو S يعامد المستويات H و P و Q ولذلك يعامد الأثر الأفقي $S_h$ ( وهو محور الاسقاط الجديد H/S ) الأثرين الأفقيين $P_h$ و $Q_h$ · نأخذ نقطة N(n,n') على الأثر الأمامي $P_v$ ونحدد مسقطها $n_2$ في مستوي الاسقاط الجديد S · نمرر من نقطة تقاطع $P_h$ مع محور الاسقاط H/S و $n_2$ مستقيما فنحصل على $P_s$ ونرسم من نقطة تقاطع $Q_h$ مع محور الاسقاط الجديد H/S مستقيما يوازي $P_s$ فنحصل على $Q_s$ (الشكل ٤١٥ آ ) مقطع العمود $\ell$ على $P_s$ و $Q_s$ يحدد البعد الحقيقي بين المستويين P و Q ·




شكل رقم ( ٤١٥ آ )



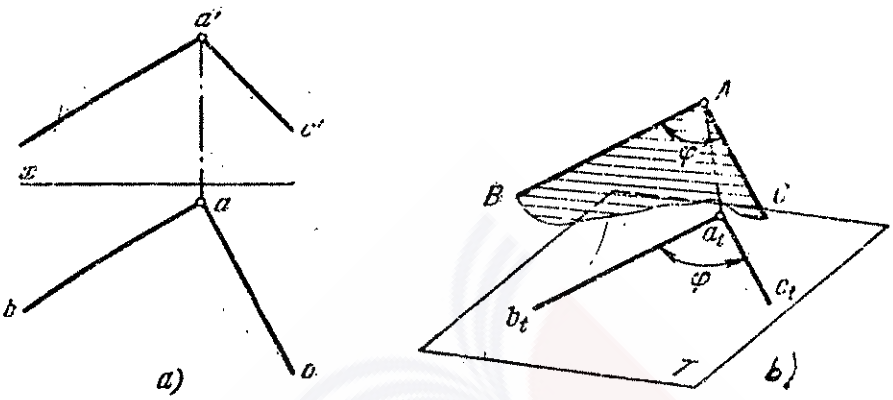

شكل رقم ( ٤١٥ ب )

عند استخدام التدوير الانتقالي نأخذ نقطة $N(n,n')$ على $P_v$ ونرسم منها أفق المستوي فيكون مسقطه الأمامي موازيا لخط الأرض ومسقطه الأفقي موازيا $P_h$ ( الشكل ٤١٥ب ) . نأخذ في موقع مناسب على خط الأرض النقطة $n_1$ ونرسم منها مستقيما يعامد خط الأرض فيمثل المسقط الأفقي لأفق المستوي $P$ في وضعيته الاسقاطية بعد التدوير . ونرسم على أبعاد تساوي المسافات بين المسقط الأفقي لأفق المستوي في وضعه الابتدائي والأثرين $P_h$ و $Q_h$ ، مستقيمين يعامدان خط الأرض فنحصل على $P_{1h}$ و $Q_{1h}$ بعد ذلك نحدد $n_1'$ من تقاطع خط التداعي المقام من $n_1$ مع الخط الأفقي المار من $n'$ ( المتطابق مع المسقط الأمامي لأفق المستوي ) . نمرر من $n_1'$ ونقطة تقاطع $P_{1h}$ مع خط الأرض مستقيما فنحصل على الأثر الأمامي $P_{1v}$ للمستوي $P$ في وضعه الاسقاطي بعد التدوير . نرسم من نقطة تقاطع $Q_{1h}$ مع خط الأرض مستقيما يوازي $P_{1v}$ فنحصل على $Q_{1v}$ . المسافة الحقيقية بينهما تساوي طول مقطع المستقيم $\ell$ العمودي على $Q_{1v}$ و $P_{1v}$ ( الشكل ٤١٥ ب ) .

١١- حدد القيمة الحقيقية للزاوية $BAC$ ( الشكل ٤١٦ آ ) .

<u>الحل</u> : اذا كان مستوي الزاوية موازيا لأحد مستويات الاسقاط فان مسقط هذه الزاوية عليه يكون دون أي تشوه ويمثل قيمتها الحقيقية ( الشكل ٤١٦ ب ) .

نرسم أفق مستوي الزاوية 12 فنجد أنه لايعامد أي من مستويات الاسقاط ، ولذلك يكون مستوي الزاوية في حالته العامة . ولهذا يمكن حل هذه المسألة باحدى الطرق التالية :



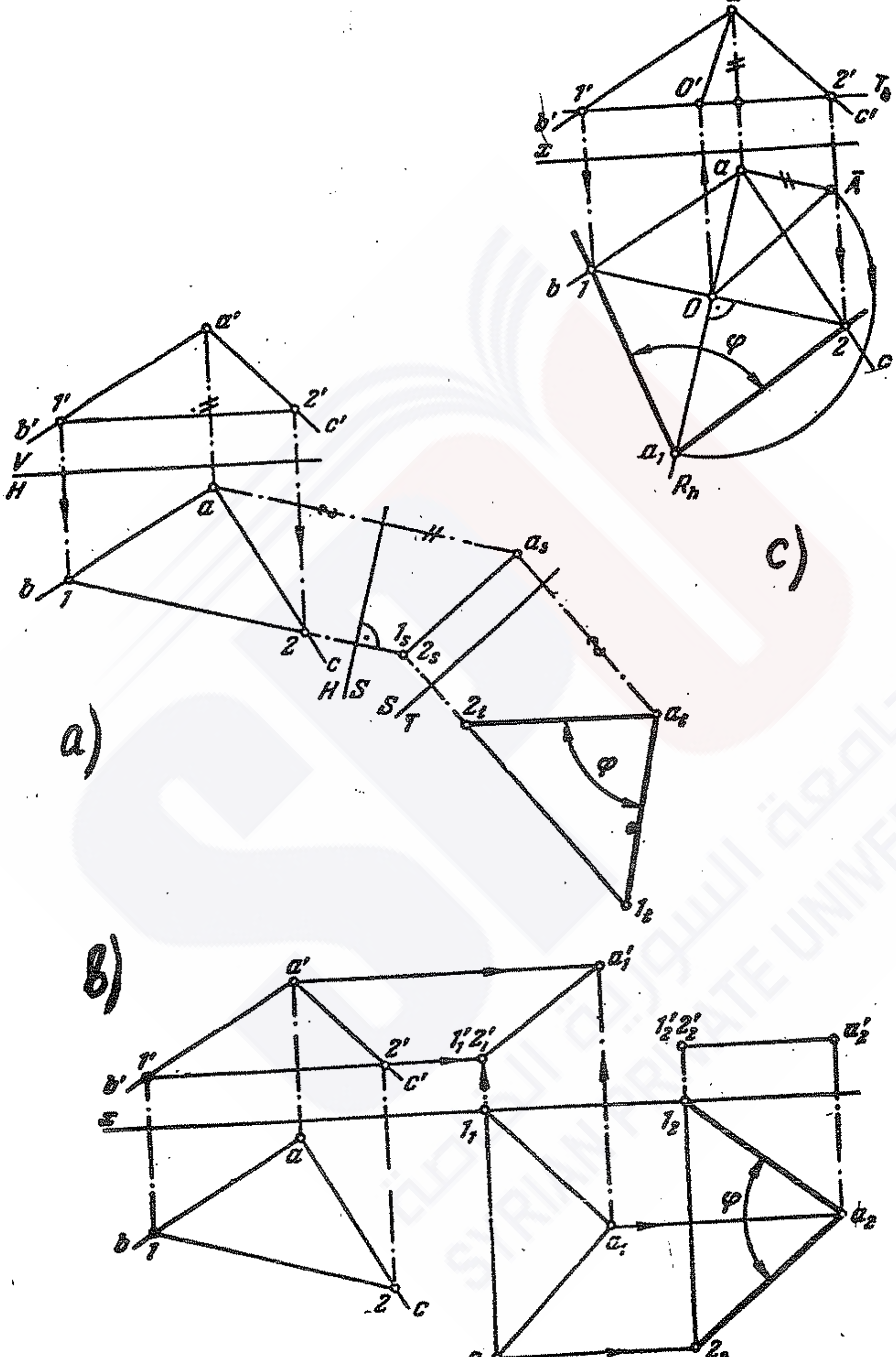

شكل رقم ( ٤١٦ )

آ ــ باستخدام مجاميع الاسقاط المساعدة ( الشكل ٤١٧ آ ) .

ب ــ باستخدام التدوير الانتقالي ( الشكل ٤١٧ ب ) .

ج ــ باستخدام التدوير حول أفق المستوي ( أو جبهته ) ، ( الشكل ٤١٧ ج ).

في الطريقة الأولى نقوم باستبدال مستوي الاسقاط V بمستو S يعامد المستوي H ومستوي الزاوية BAC ، ولذلك يكون أثره الأفقي ( محور الاسقاط الجديد H/S ) عموديا على المسقط الأفقي 12 لأفق مستوي الزاوية . نسقط الزاوية BAC على هذا المستوي فيكون مسقطها خطا مستقيما $a_s 1_s$ . بعد ذلك نستبدل مستوي الاسقاط الأفقي H بمستو T يعامد المستوي S ويوازي مستوي الزاوية BAC . لذلك تكون ، حسب قواعد توازي المستويات، آثارهما المتماثلة متوازية . وهذا يعني أن أثر المستوي T على المستوي S ( محور الاسقاط الجديد S/T ) يوازي أثر مستوي الزاوية على المستوي S المتطابق مع $a_s 1_s$ . نسقط الآن الزاوية BAC على المستوي T وفق الأسس المتبعة في هذه الطريقة فيكون مسقطها $1_ع a_ع 2_ع$ مساويا للزاوية الفراغية الحقيقية .




شكل رقم (٤١٧)

في الطريقة الثانية نقوم أولا بتدوير مستوي الزاوية BAC حتى يصبح اسقاطيا أماميا فيعامد أفقه المستوي V ويكون المسقط الأفقي لأفقه عموديا على خط الأرض ٠ لذلك نختار نقطة على خط الأرض في موقع مناسب ونفترضها النقطة $1_1$ ونقيم منها عمودا على خط الأرض ونأخذ عليه مقطعا $1_1 2_1$ يساوي المقطع 12 ونحدد وفق أسس هذه الطريقة موقع $a_1$ ومن ثم نحدد مسقط الزاوية الأمامي $1'_1 a'_1$ الذي يكون خطا مستقيما متطابقا مع أثر مستوي الزاوية ٠ بعد ذلك نقوم بتدوير مستوي الزاوية حتى يصبح مستويا تطابقيا أفقيا ( يوازي المستوي H ) فيكون أثره الأمامي موازيا لخط الأرض ٠ ولذلك نرسم في موقع مناسب فوق خط الأرض مستقيما يوازي خط الأرض طوله يساوي $1'_1 a'_1$ فنحصل على $1'_2 a'_2$ ٠ نحدد وفق قواعد هذه الطريقة المسقط الأفقي $1_2 a_2 2_2$ للزاوية الذي يعطينا القيمة $\varphi$ الحقيقية للزاوية BAC ٠

في الطريقة الثالثة نقوم بتدوير مستوي الزاوية حول أفقه 1-2 حتى يتخذ وضعا موازيا لمستوي الاسقاط الأفقي H ( وضعية المستوي T التي يكون فيها الأثر الأمامي $T_v$ موازيا لخط الأرض )٠ طريقة الحل تتم وفق الخطوات التالية :

١- نمرر مستوي تدوير النقطة A الذي يكون مستويا اسقاطيا أفقيا R يعامد أفق المستوي ( أي يعامد محور التدوير ) ٠

٢- نحدد مركز تدوير النقطة A ( النقطة '0,0 ) من تقاطع أفق المستوي مع المستوي R ونحدد مسقطي نصف قطر التدوير ('0a,0'a) ٠

٣- تحديد الطول الحقيقي لنصف قطر التدوير بواسطة المثلث قائم الزاوية ( الطول الحقيقي يساوي طول $0\bar{A}$ وتر المثلث قائم الزاوية $0a\bar{A}$ ) ٠

٤- نرسم بنصف قطر $0\bar{A}$ قوس دائرة يقطع الأثر الأفقي $R_h$ لمستوي

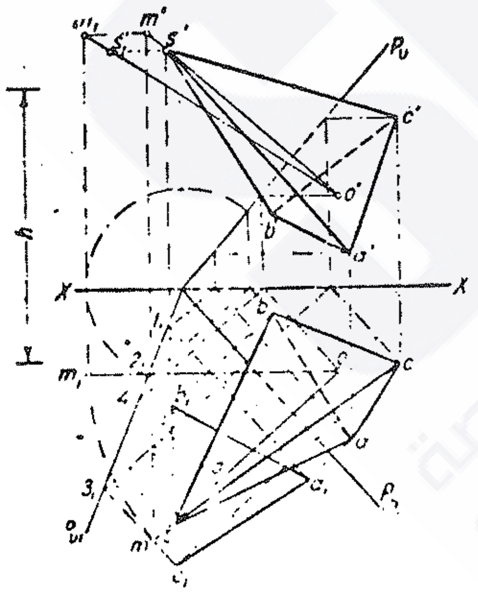
التدوير في نقطة $a_1$ المسقط الأفقي لرأس الزاوية بعد تدويرها حول أفقها حتى تطابقها مع المستوي T الموازي لمستوي الاسقاط الأفقي H .

هـ قيمة الزاوية $1a_1 2$ تساوي القيمة الحقيقية $\varphi$ للزاوية BAC .

من مقارنة الحلول الثلاثة السابقة نلاحظ أن الحل الأكثر بساطة ووضوحا للمسائل المشابهة لهذا المثال يكون بواسطة استخدام طريقة التدوير حول أفق ( أو جبهة ) المستوي .

١٢ـ مثل في التعبير الاسقاطي الثنائي الهرم الثلاثي المنتظم SABC الذي تستند قاعدته SABC على المستوي P في حالته العامة اذا علم الوضع التطابقي الأفقي $a_1b_1c_1$ لقاعدته ( الشكل ٤١٨ ) وارتفاعه h .

**الحل** : نطابق المستوي P مع مستوي الاسقاط الأفقي ونرسم من رؤوس المثلث $a_1b_1c_1$ ومركزه $0_1$ آفاق المستوي $1_1-a_1$ و $2_1-b_1$ و $3_1-c_1$ و $0_1-4_1$ في وضعها التطابقي الأفقي مع مستوي الاسقاط الأفقي H . بعد ذلك ندور المستوي P مع المثلث في الاتجاه العكسي ونضعه في وضعيته الأولية ( الأساسية )، وبواسطة آفاق المستوي نرسم المقطين abc و $a'b'c'$ لقاعدة الهرم ومسقطي مركزه $(0,0')$ . لرسم قمة الهرم S نمرر من النقطة 0 مستقيما يعامد المستوي P ونختار عليه



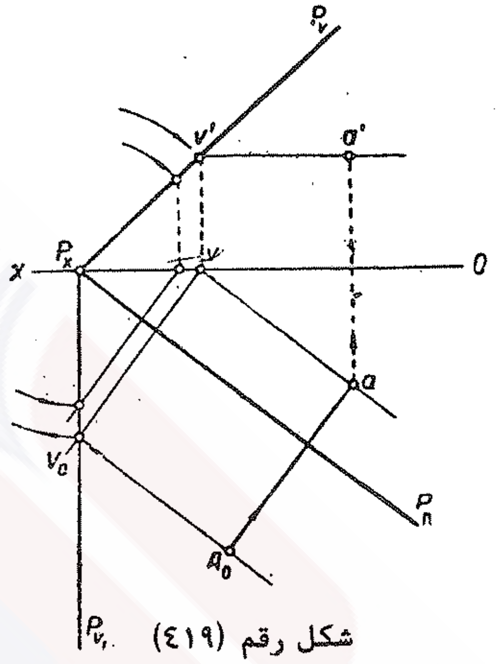

شكل رقم ( ٤١٨ )

نقطة كيفية $(m,m')$ ونقوم بتدوير العمود حتى يوازي مستوي الاسقاط الأمامي V . في هذه الوضعية نأخذ على هذا العمود مقطعا $O'S'_1$ يساوي ارتفاع الهرم h ونحدد عليه النقطة $S'_1$ ومن ثم نعيد العمود الى وضعيته الأولية وبذلك نحصل على مسقطي قمة الهرم $(S,S')$ . نصل المساقط المماثلة لقمة الهرم ورؤوس قاعدته فنحصل على مسقطي الهرم المطلوبين $S'a'b'c'$ و $Sabc$ .

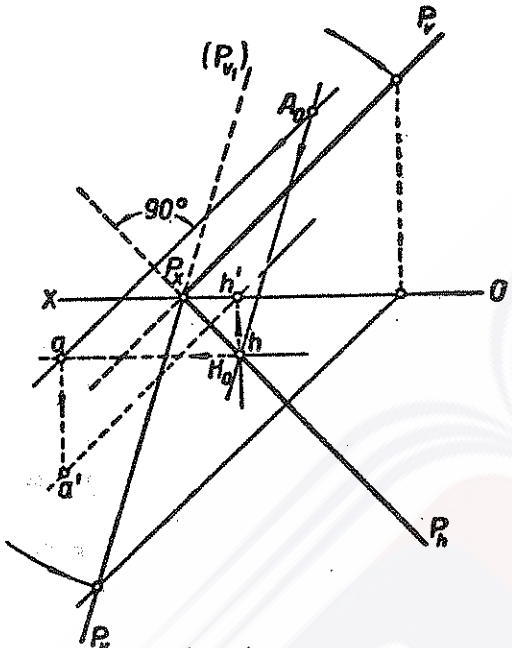
١٣ـ حدد مسقطي النقطة A المنتمية للمستوي P اذا علم وضعها التطابقي $A_o$ مع مستوي الاسقاط الأفقي H ( الشكلان ٤١٩ و ٤٢٠ ) .

**الحل ١ ( الشكل ٤١٩)** : نحدد الوضع التطابقي $P_{v1}$ للأثر الأمامي مع مستوي الاسقاط الأفقي H ونرسم من النقطة $A_o$ الوضع التطابقي لأفق المستوي الذي يوازي الأثر الأفقي $P_h$ حتى يقطع $P_{v1}$ في $V_o$ . نحدد بواسطة $V_o$ مسقطيها $(v,v')$ ونمرر منها مسقطي أفق المستوي . ننزل من $A_o$ عمودا على $P_h$ فنحصل من تقاطعه مع المسقط الأفقي لأفق المستوي على المسقط الأفقي a للنقطة A ومن خلالها نحدد المسقط الأمامي 'a على المسقط الأمامي لأفق المستوي .

**الحل ٢ ( الشكل ٤٢٠)** : النقطة $A_o$ تقع في الجزء الخلفي من مستوي الاسقاط الأفقي H . نحدد الوضع التطابقي $P_{v1}$ للأثر الأمامي للمستوي ونمرر من النقطة $A_o$ الوضع التطابقي لجبهة المستوي الذي يوازي الأثر الأمامي التطابقي $P_{v1}$ حتى يتقاطع مع الأثر الأفقي $P_h$ في النقطة $H_o$ . نحدد بواسطة $H_o$ مسقطيها $(h,h')$ ونمرر منهما مساقط جبهة المستوي . ننزل من $A_o$ عمودا على الأثر الأفقي $P_h$ فنحصل من تقاطعه مع المسقط الأفقي لجبهة المستوي على المسقط الأفقي a للنقطة A ومن خلالها نحدد المسقط الأمامي 'a على المسقط الأمامي لجبهة المستوي ؛




شكل رقم (٤١٩)




شكل رقم (٤٢٠)

* **ملاحظـــة** : يمكننا التوصل الى الحل باستخدام جبهة المستوي في الحل (١) وأفق المستوي في الحل (٢) ٠ توصل للحل بنفسك ٠

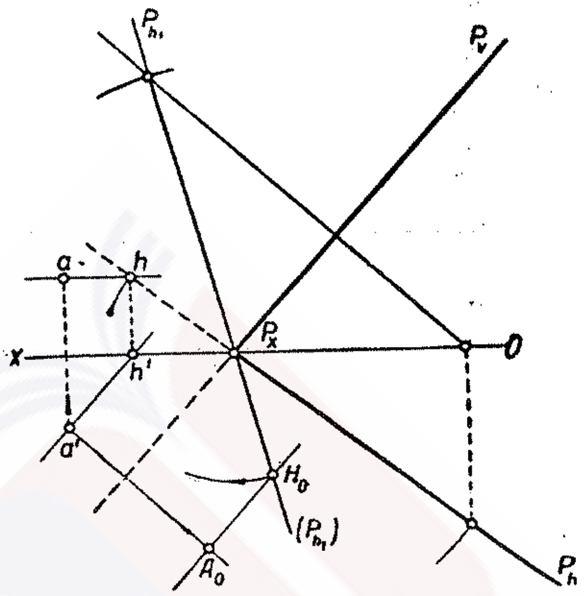
يوضح الشكلان (٤٢١ و ٤٢٢) طريقة تحديد مسقطي النقطة A المنتميــة للمستوي P بمعرفة وضعها التطابقي $A_o$ مع مستوي الاسقاط الأمامي V ٠

١٤ـ ارسم مسقطي المثلث قائم الزاوية ABC المنتمي للمستوي P اذا علـــم المسقط الأمامي a'c' لوتره AC وزاوية الرأس C تساوي 60° (الشكل ٤٢٣)٠

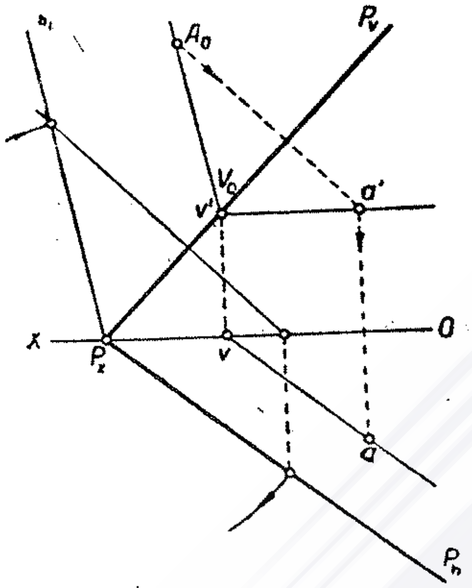
**الحــل** : بمعرفة a'c' نحدد المسقطين الأفقيين a و c باستخدام جبهــات المستوي P ٠ نحدد الوضع التطابقي $A_o$ و $C_o$ للنقطتين A(a,a') و C(c,c') مع المستوي H ٠ نرسم المثلث $A_oB_oC_o$ بقياساته الحقيقية، وبمعرفة النقطــة $B_o$ نحدد مسقطيها (b,b') ومن ثم نصل النقاط (a,a') و (c,c') و (b,b') فنحصل على المسقطين (abc) و (a'b'c') المطلوبين ٠

يوضح الشكل (٤٢٤) حل هذه المسألة بمطابقة المستوي P مع مستـــوي الاسقاط الأمامي V ٠

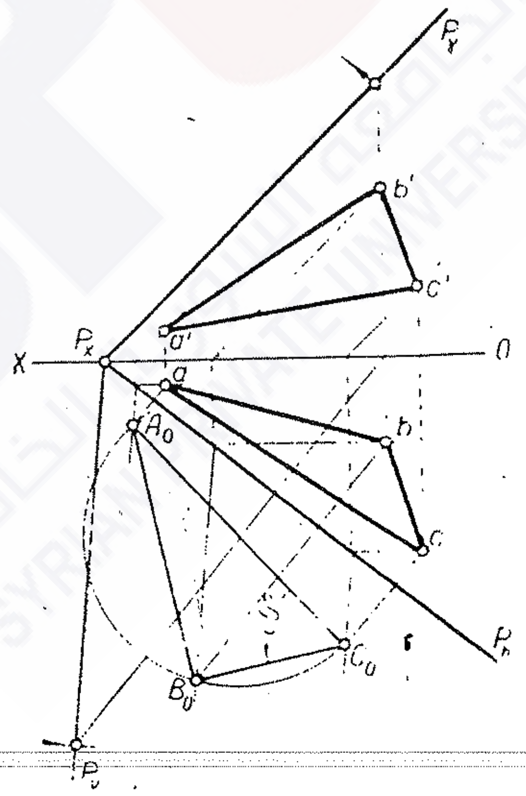
١٥ـ ارسم مسقطي المثلث متساوي الأضلاع ABC المنتمي للمستوي P اذا علـم المسقط الأفقي لضلعه AB ( الشكل ٤٢٥ ) ٠



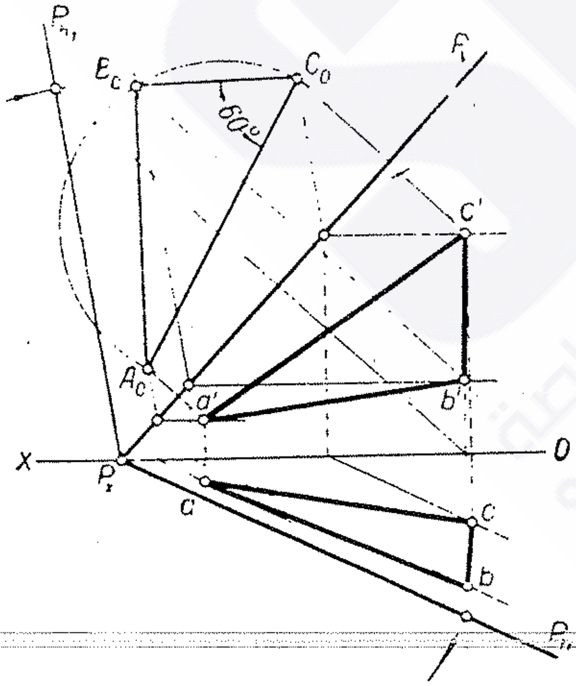

شكل رقم (٤٢١)



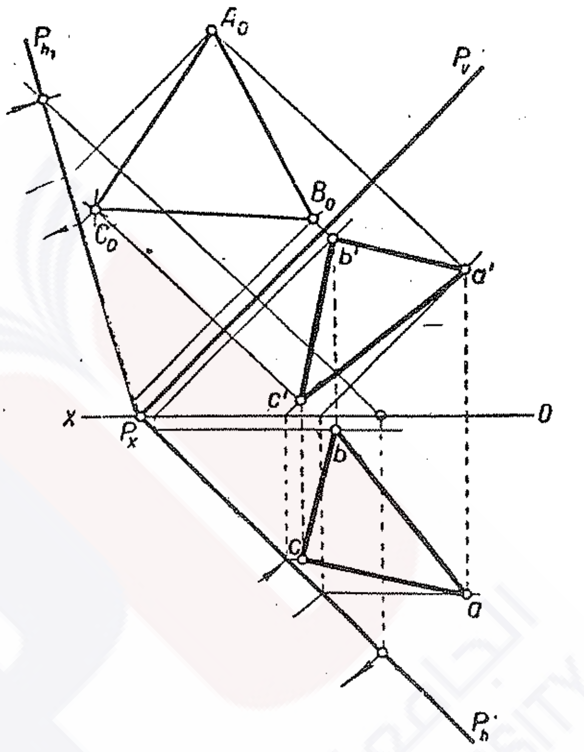

شكل رقم (٤٢٢)



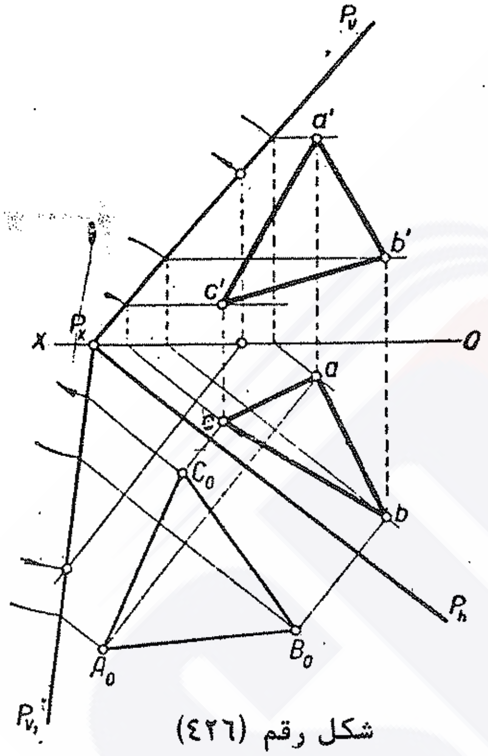

شكل رقم (٤٢٣)




شكل رقم (٤٢٤)




شكل رقم (٤٢٥)




شكل رقم (٤٢٦)

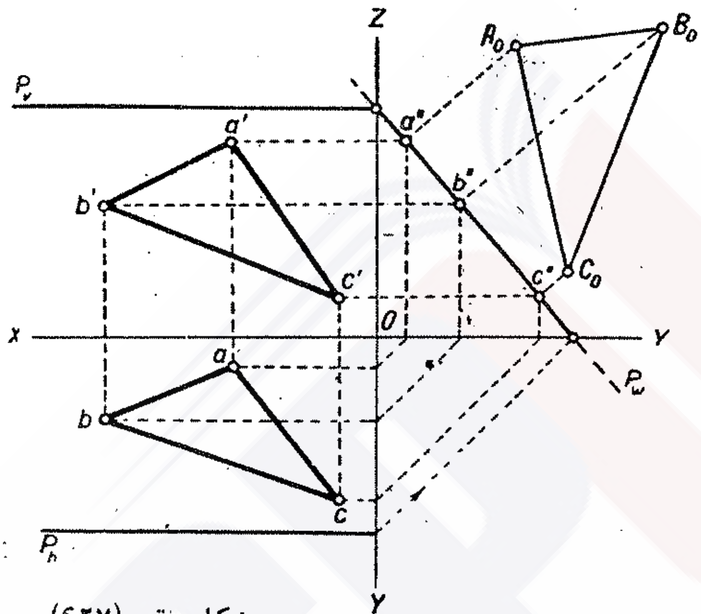
**الحل** : بمعرفة المسقطين الأفقيين a و b نحدد المسقطين الأماميين 'a و 'b باستخدام آفاق المستوي ومن ثم نحدد الوضع التطابقي $A_oB_o$ لضلع المثلث مع مستوي الاسقاط الأمامي V ، نرسم المثلث $A_oB_oC_o$ بقياساته الحقيقية وبمعرفة $C_o$ نحدد مسقطيها (c,c') ، نصل النقطة (c,c') بنهايتي الضلع (ab,a'b') فنحصل على المسقطين الأفقي (abc) والأمامي (a'b'c') المطلوبين للمثلث ABC ،

يمكن حل هذه المسألة باستخدام التطابق مع مستوي الاسقاط الأفقي H ( الشكل ٤٢٦ ) ،

١٦- حدد الشكل الحقيقي للمثلث ABC المنتمي للمستوي P الموازي لمحور الاسقاط ( خط الأرض ) اذا علم مسقطه الأفقي abc ( الشكل ٤٢٧ ) ،

**الحل** : بما أن المستوي P يوازي محور الاسقاط فهو مستو اسقاطي

جانبي • لذلك نستخدم التعبير الاسقاطي المستوي الثلاثي ونحدد المسقطين الناقصين للمثلث : الأمامي (a'b'c') والجانبي (a"b"c") . بعد ذلك نطابق المستوي P مع مستوي الاسقاط الجانبي • نحدد الوضع التطابقي $A_o$ للنقطة A باقامة عمود على $P_w$ من النقطة "a ونأخذ عليه مقطعا $a''A_o$ يساوي احداثيات (X) للنقطة A • بالطريقة




شكل رقم (٤٢٧)

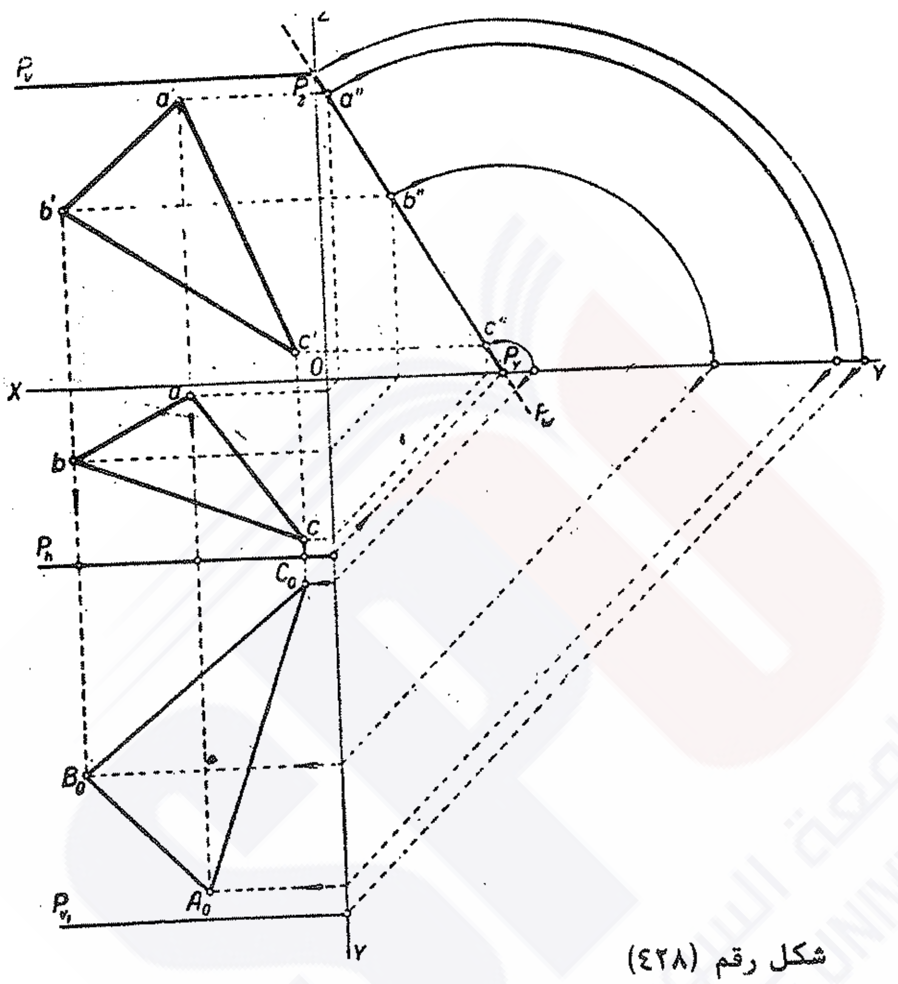
ذاتها نحدد الوضع التطابقي $B_o$ و $C_o$ للنقطتين B و C • نصل $A_o$ و $B_o$ و $C_o$ فنحصل على الشكل الحقيقي $A_oB_oC_o$ للمثلث ABC •

يمكن التوصل لحل هذه المسألة بمطابقة المستوي P مع مستوي الاسقاط الأفقي H ( الشكل ٤٢٨ ) أو بمطابقته مع مستوي الاسقاط الأمامي V الشكل ( ٤٢٩ ) •

قيم أنصاف أقطار تدوير رؤوس المثلث تحدد بمساعدة مستوي الاسقاط الجانبي ( هل تستطيع توضيح ذلك ؟ ) •

* **استنتاج مهم** : نصف قطر تدوير أية نقطة منتمية لمستوي يوازي محور الاسقاط ( خط الأرض ) لمطابقتها مع :

١ـ مستوي الاسقاط الجانبي يساوي احداثيات (X) لهذه النقطة •



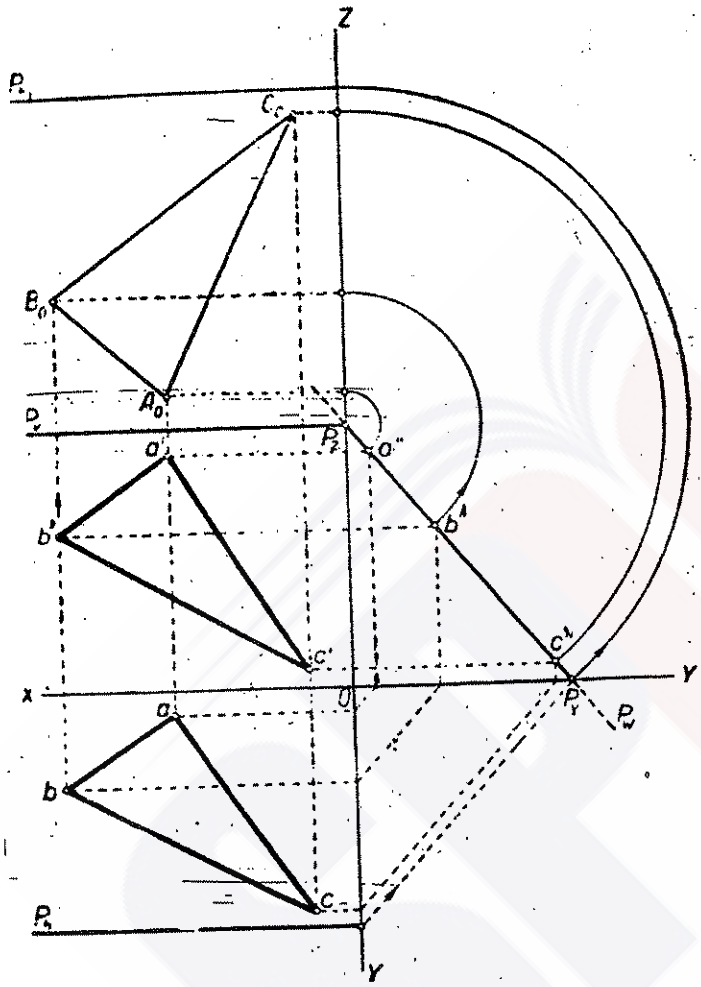

شكل رقم (٤٢٨)

٢ـ مستوي الاسقاط الأفقي يساوي $P_ya''$ أو $P_yb''$ أو $P_yc''$ ... الخ .

٣ـ مستوي الاسقاط الأمامي يساوي $P_za''$ أو $P_zb''$ أو $P_zc''$ ... الخ .

١٧ـ ارسم مسقطي المخروط الدائري القائم المستند بقاعدته على المستوي P ، اذا علم أن نصف قطر قاعدته (٢٠) ملم وارتفاعه h = ٥٥ ملم ومحوره يتطابق مع المستقيم (1,1') ( الشكل ٤٣٠ ) .

**الحل** : نحدد نقطة (c,c') تقاطع المستقيم (1,1') مع المستوي P

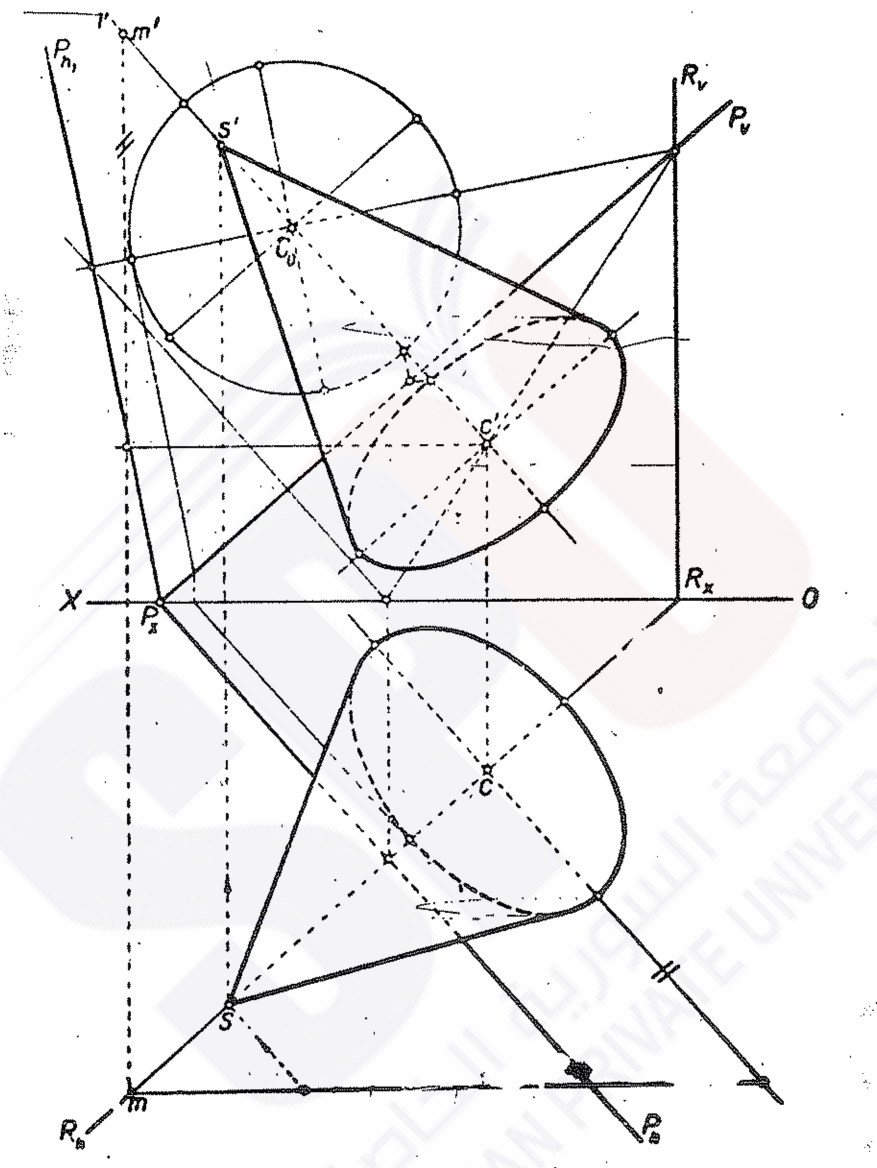



شكل رقم (٤٢٩)

والتي تمثل مركز قاعدة المخروط . لرسم مسقطي قاعدة المخروط لابد من الملاحظات التالية : أن مسقط الدائرة الواقعة على مستو في حالته العامة يكون قطعا ناقصا قطره الكبير يساوي دائما قطر الدائرة ولكن لايمكننا الحصول على قطر واحد يكون مسقطاه على مستويي الاسقاطين دون تشوه في آن واحد . لذلك يجب تحديد القطر الكبير للقطع الناقص في كل مستو اسقاطي على حدة . ففي المستوي H يكون مسقط القطر دون تشوه اذا وقع على أفق المستوي بينما القطر الصغير يسقط بتشوه ولكن بزاوية قائمة مع القطر الكبير . أما في المستوي V فان القطر الكبير الواقع على أحد جبهات المستوي هو الذي يُسقط دون تشوه ويكون القطر الصغير عموديا عليه ولكن قياساته مشوهة .

ولاستكمال الحل نتبع الخطوات التالية :

أ- نطابق المستوي P مع مستوي الاسقاط الأمامي V ونحدد الوضع



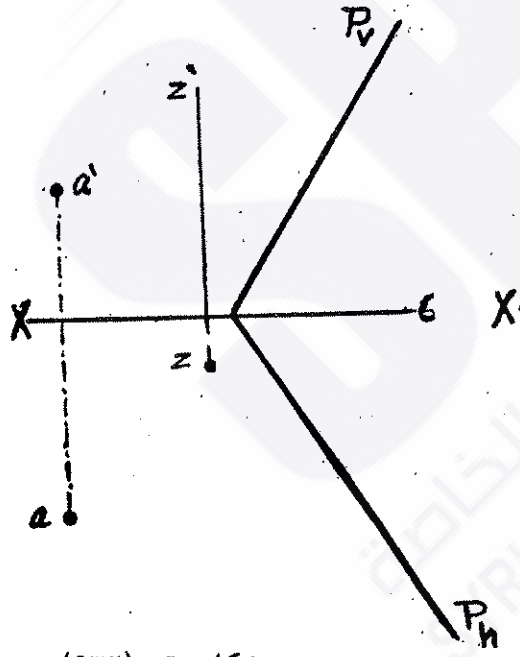

شكل رقم ( ٤٣٠ )

التطابقي $C_o$ لمركز قاعدة المخروط ومن ثم نرسم من هذا المركز دائرة نصف قطرها ( ٢٠ ) ملم ونمرر زوجين من الأقطار المتعامدة مع بعضها : قطر يوازي $P_h$ وآخر يعامده وقطر يوازي $P_{v1}$ وآخر يعامده

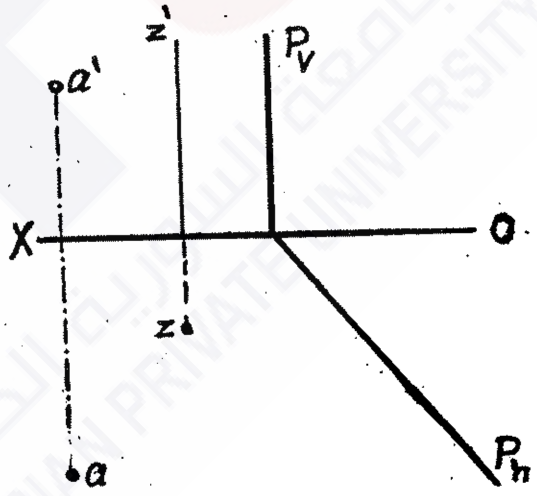
ومن ثم نحدد المسقط الأفقي للزوج الأول من أقطار الدائرة والمسقط الأمامي للزوج الثاني . بعد ذلك نرسم على هذه الأقطار القطع الناقص في كل مسقط . لتحديد نقطة (s,s') ـ قمة المخروط ، نأخذ على المستقيم (1,1') من النقطة (c,c') مقطعا طوله (٥٥) ملم ونمرر من النقطتين S و s' مستقيمات مماسة لكل من القطعين الناقصين فنحصل على المسقطين المطلوبين .

**تمارين تطبيقية :**

١ـ اجعل النقطة A ضمن المستوي P المحدد بأثريه بتدويرها حول المحور Z ( الشكلان ٤٣١ و ٤٣٢ ) .




شكل رقم (٤٣٢)




شكل رقم (٤٣١)

٢ـ ضع مقطع المستقيم AB في المستوي P المحدد بأثريه بتدويره حول محور عمودي على مستوي الاسقاط الأفقي H .

. A(65,70,50) و B(10,5,20) و P(65,75,60)

٣ـ دور المستقيم AB حول محور يعامد مستوي الاسقاط الأفقي H بحيث يصبح مسقطاه في وضع متناظر بالنسبة لخط الأرض ٠

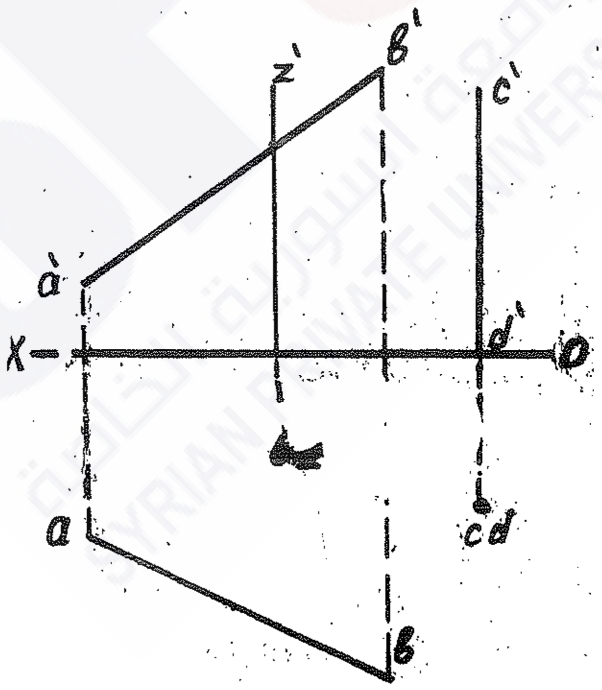
. B(10,10,55) و A(85,55,30)

٤ـ اجعل المستقيم AB في وضع فراغي يمر من النقطة C وذلك بتدويره حول محور يعامد مستوي الاسقاط الأفقي H .

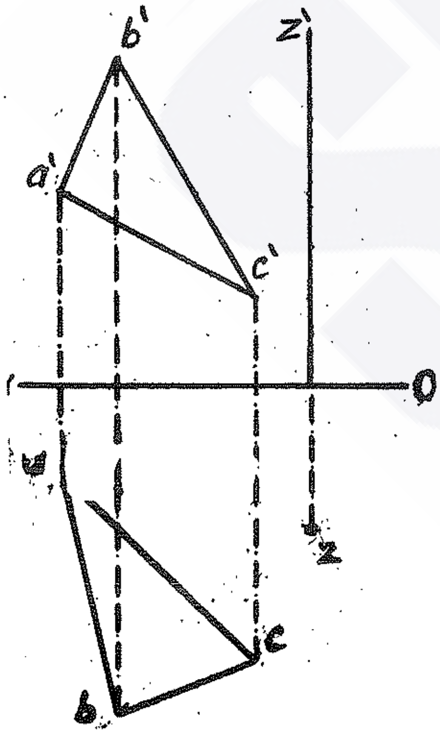
. C(10,40,35) و B(45,15,10) و A(95,45,60)

٥ـ ضع المستقيم AB في وضع متقاطع مع المستقيم CD وذلك بتدويره حول المحور Z ( الشكل ٤٣٣) .

٦ـ دور المثلث ABC حول المحور Z بزاوية 90° باتجاه معاكس لبدوران عقرب الساعة ( الشكل ٤٣٤) ٠




شكل رقم (٤٣٣)

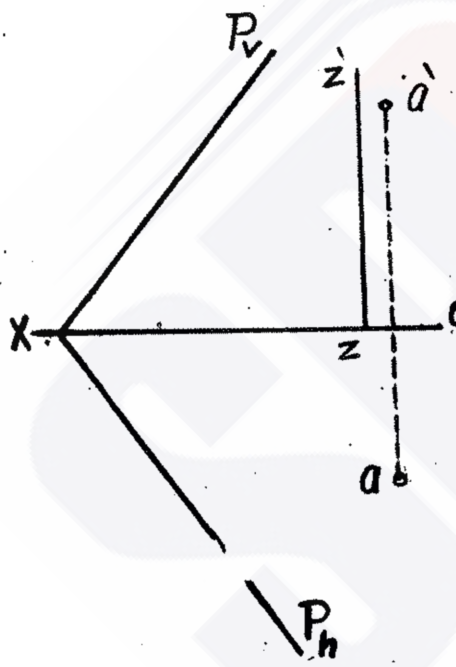



شكل رقم (٤٣٤)

٧ـ استخدم التدوير حول محور يعامد المستوي H لتغيير الوضع الفراغي للمستقيم AB بحيث تكون مساقطه في التعبير الاسقاطي الثنائي موازية لخط الأرض • A(75,65,25) و B(10,5,55) •

٨ـ اجعل المستوي P متطابقا مع المستقيم AB بتدويره حول محور يعامد المستوي H •P(70,55,60) و A(60,80,50) و B(10,5,20) •

٩ـ اجعل المستوي P يمر من النقطة A وذلك بتدويره حول المحور Z ( الشكل ٤٣٥ ) •




شكل رقم (٤٣٥)

١٠ـ مرر المستوي P من النقطة A بتدويره حول أثره الأفقي $P_h$ • P(45,55,55) و A(65,40,40) •

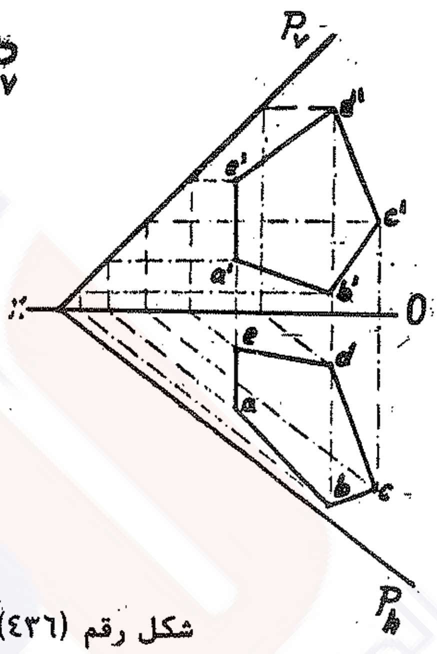
١١ـ حدد الشكل الحقيقي للمثلث ABC بتدويره حول أفقه AD حتى يتطابق مع المستوي التطابقي الأفقي P المار من النقطة A • A(90,40,30) و B(0,60,50) و C(50,20,0) .

١٢ـ احعل مستوي المثلث ABC موازيا للمستوي H باستخدام :

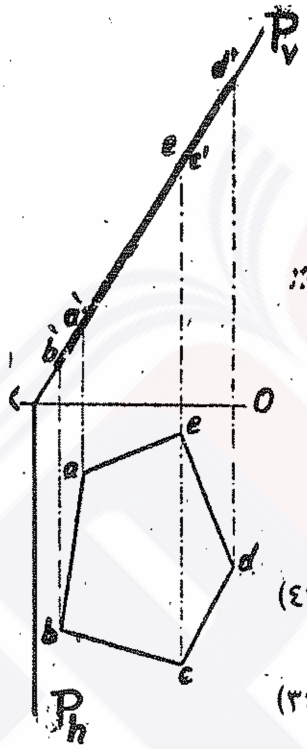
آ ـ طريقة التدوير الانتقالي ، ب ـ مجاميع الاسقاط المساعدة

A(100,5,25) و B(55,80,85) و C(5,35,5) .

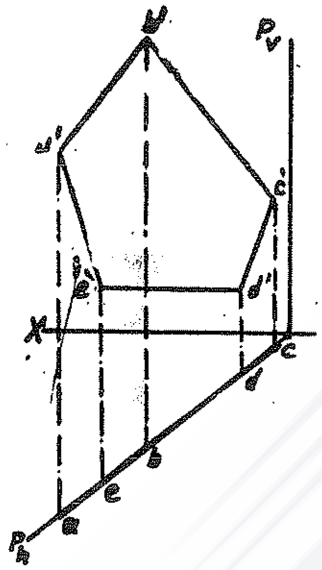
١٣ـ ارسم مسقطي المنصف الفراغي ( في الفراغ ) للزاوية المحصورة بين الأثرين $P_h$ و $P_v$ للمستوي P • (40,90,40)ه




شكل رقم (٤٣٦)




شكل رقم (٣٤٧)




شكل رقم (٤٣٨)

١٤ـ ارسم الأثر الأمامي $P_v$ للمستوي P اذا علم أن الزاوية الفراغية بين أثريه $P_v$ و $P_h$ تساوي °60 وان ( ? ,P(70,50 •

١٥ـ طبق المستوي P والنقطة A المنتمية اليه مع المستوي H •
P(60,50,70) و ( ? ,A(0,20 •

١٦ـ حدد الشكل الحقيقي للسطح خماسي الأضلاع ABCDE المنتمى للمستوي P ( الأشكال ٤٣٦ ـ ٤٣٨ ) مستخدما :
آ ـ طريقة التطابق ، ب ـ طريقة مجاميع الاسقاط المساعدة ( استبدال مستويات الاسقاط ) ، ج ـ طريقة التدوير الانتقالي •

١٧ـ حدد الشكل الحقيقي للمثلث ABC المنتمي للمستوي P ( الشكلان

٤٣٩ و ٤٤٠ ) مستخدما طريقة التطابق .

١٨ـ حدد الشكل الحقيقى للمستوي المحدد بخماسي الأضلاع ABCDE ( الشكل ٤٤١ ) مستخدما : آ ـ طريقة التدوير الانتقالي ، ب ـ طريقة مجاميع الاسقاط المساعدة .

١٩ـ طابق المستوي P والمستقيم AB المنتمي اليه مع مستوي الاسقاط الأفقي H ( الشكل ٤٤٢ ) .

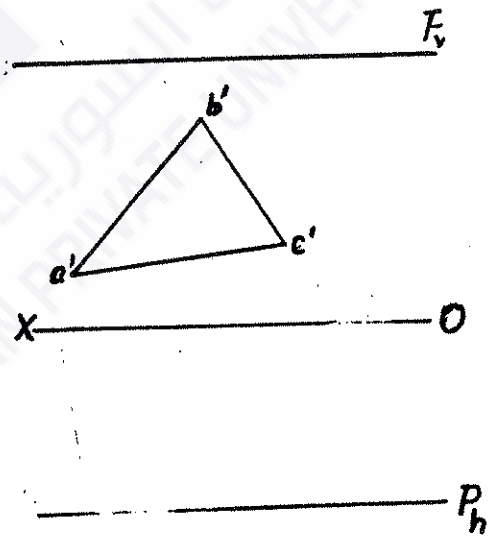
٢٠ـ استخدم التدوير حول المحور المحدد ( Z ) لجعل المستوي P المحدد بأثريه $P_h$ و $P_v$ :

آ ـ مستويا اسقاطيا اماميا ( الشكل ٤٤٣ ،

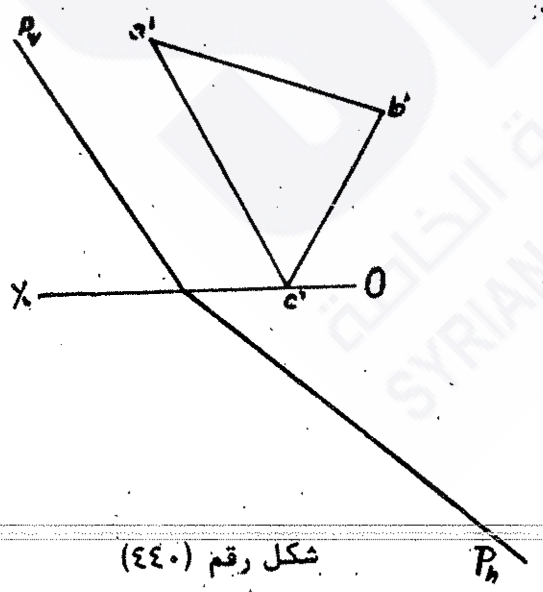
ب ـ مستويا موازيا لخط الارض ( الشكل ٤٤٤ )

ج ـ يدور بزاوية 90° باتجاه دوران عقارب الساعة ( الشكل ٤٤٥ )

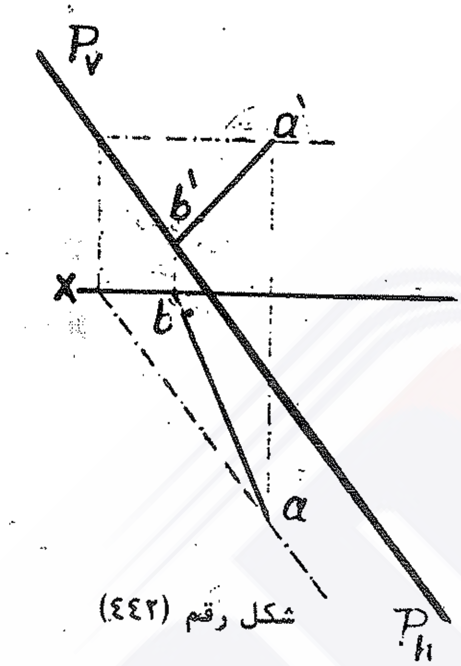
٢١ـ طابق النقطة A المنتمية للمستوي P دون مطابقة المستوي P :



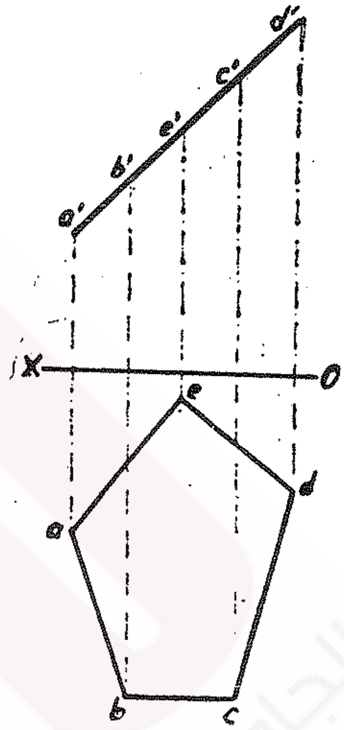

شكل رقم ( ٤٣٩ )



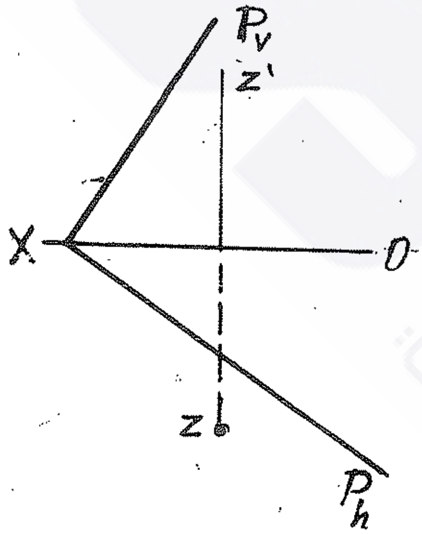

شكل رقم (٤٤٠)



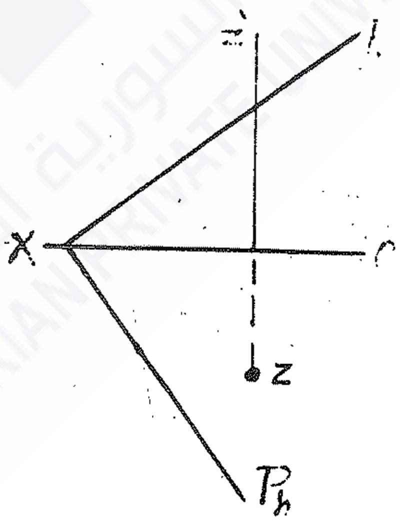

شكل رقم (٤٤٢)



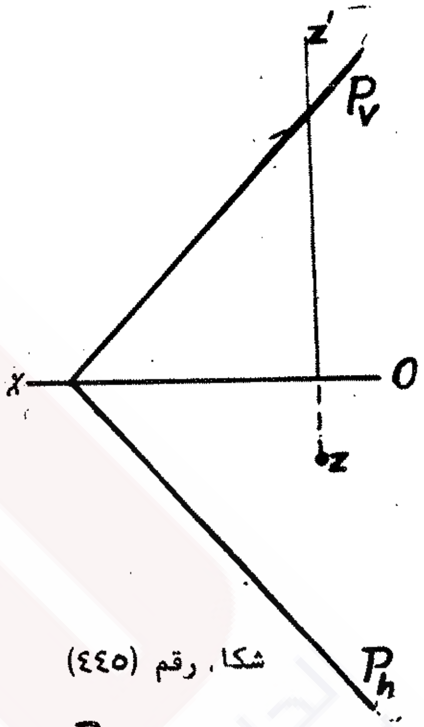

شكل رقم (٤٤١)



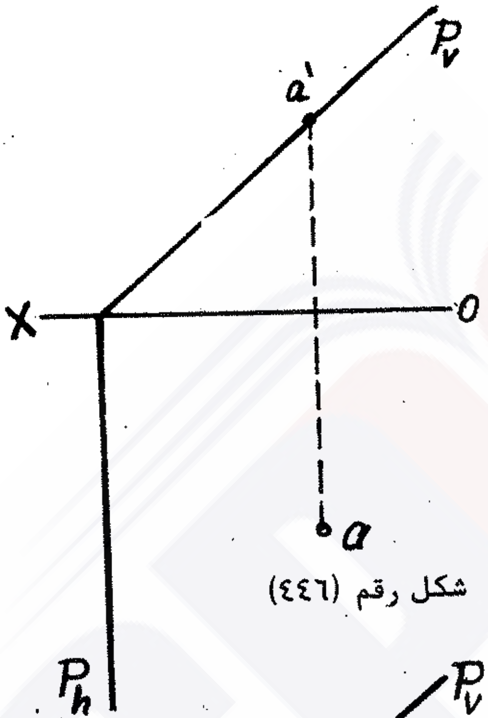

شكل رقم (٤٤٤)



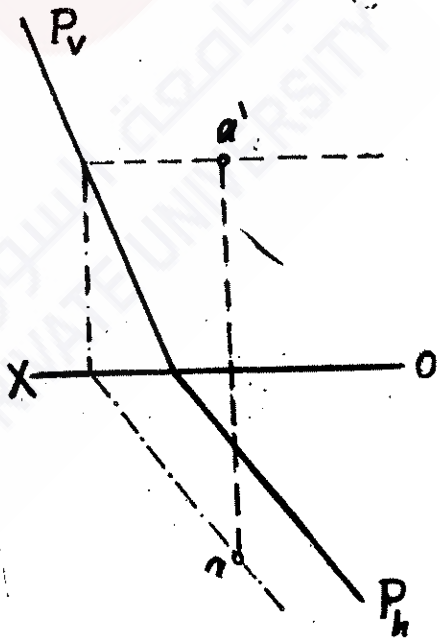

شكل رقم (٤٤٣)



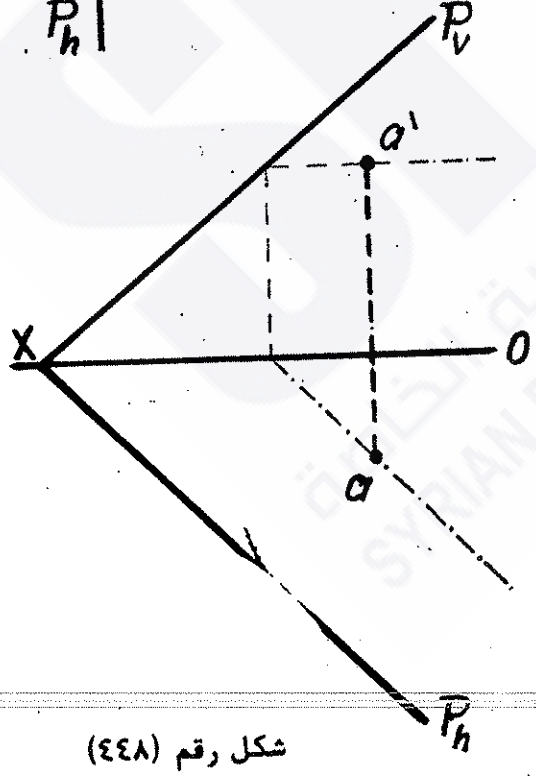

شكل رقم (٤٤٥)




شكل رقم (٤٤٦)




شكل رقم (٤٤٧)




شكل رقم (٤٤٨)

آ ــ مع مستوي الاسقاط الأمامي V ( الشكل ٤٤٦ ) ٠

ب ــ مع مستوي الاسقاط الأفقي H ( الشكلان ٤٤٧ و ٤٤٨ ) ٠

٢٢ــ ضع المربع ABCD في المستوي الاسقاطي الأفقي P اذا علم وضعه التطابقي $a_1b_1c_1d_1$ مع المستوي H ( الشكل ٤٤٩ ) ٠

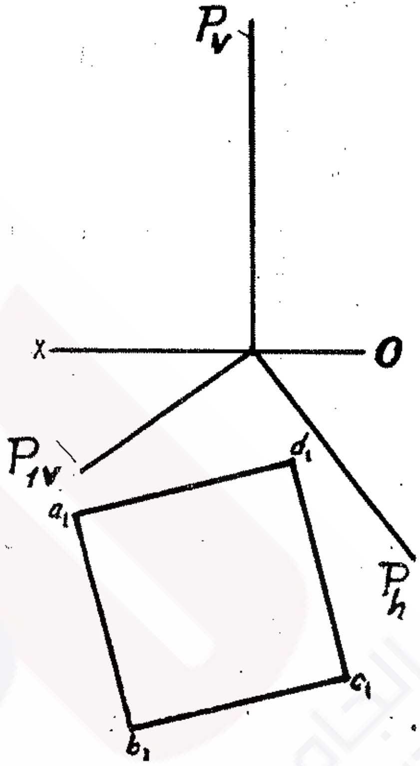
٢٣ــ لدينا الهرم SABCD ( الشكل ٤٥٠ ) ٠ حدد الطول الحقيقي لحرفي ( ضلعي ) الهرم AS و CS باستخدام طريقة استبدال مستويات الاسقاط ( مجاميع الاسقاط المساعدة ) ولحرفيه BS و DS باستخدام طريقة التدوير حول محور يعامد مستوي الاسقاط الأفقي H ( يمكن استخدام طريقة التدوير الانتقالي ) ٠

٢٤ــ ارسم في المستوي P المحدد بأثريه مثلثا متساوي الأضلاع اذا كانت النقطتان A و B المحددتان لمقطع المستقيم AB تمثلان قمتين ( رأسين ) للمثلث المطلوب ( الشكل ٤٥١ ) ٠

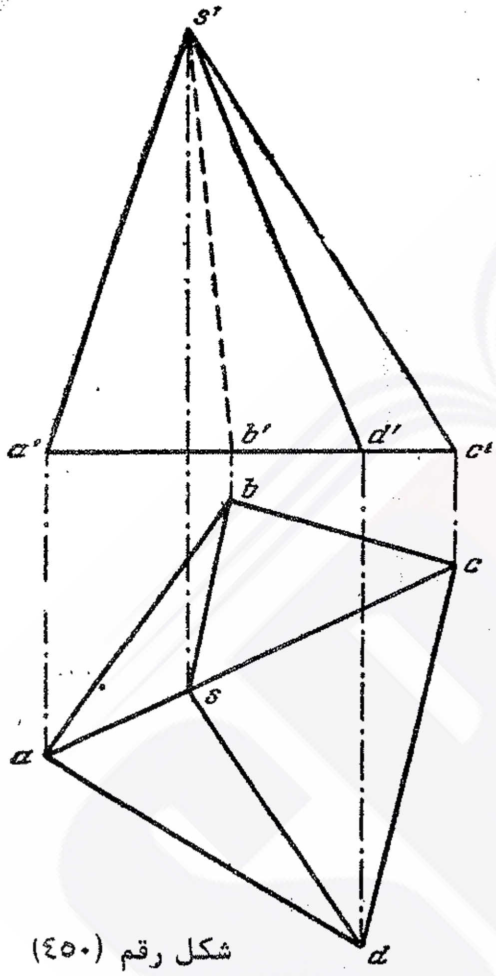
٢٥ــ ارسم مسقطي السطح سداسي الاضلاع ABCDEF المنتمي للمستوي P اذا علم وضعه التطابقي $a_1b_1c_1d_1e_1f_1$ مع المستوي H ، واذا كانت الزاوية بين أثري المستوي $P_h$ و $P_v$ تساوي $60°$ ( الشكل ٤٥٢ ) ٠

٢٦ــ مثل في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي الهرم SABCDE المستند بقاعدته ABCDE على المستوي الاسقاطي الأمامي P ، اذا علم الوضع التطابقي الأفقي $a_1b_1c_1d_1e_1$ لقاعدته ABCDE ومسقطي ارتفاعه $S(s,s')$ ( الشكل ٤٥٣ ) ٠

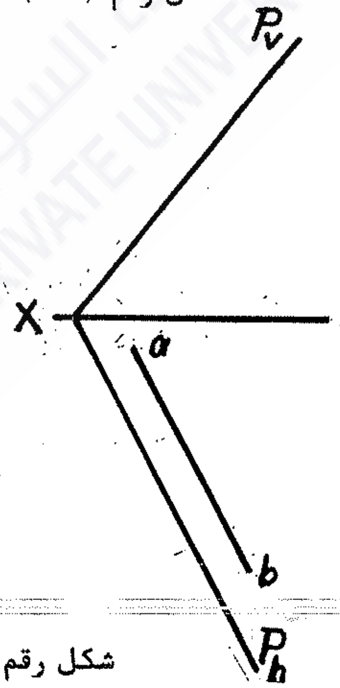
٢٧ــ مثل في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي الهرم الثلاثي SABC الذي تستند قاعدته ABC على المستوي P في حالته العامة ، اذا علم ارتفاعه h والوضع التطابقي الأفقي $a_1b_1c_1$ لقاعدته ABC (الشكل٤٥٤)٠



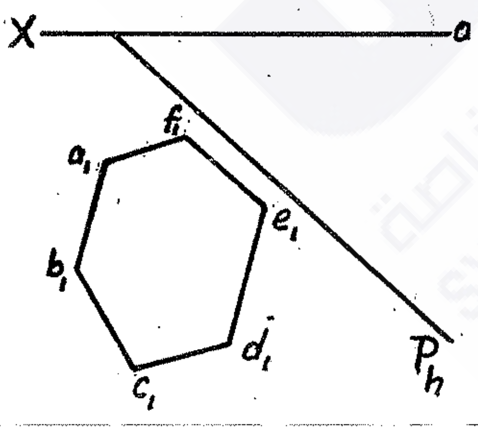

شكل رقم (٤٤٩)



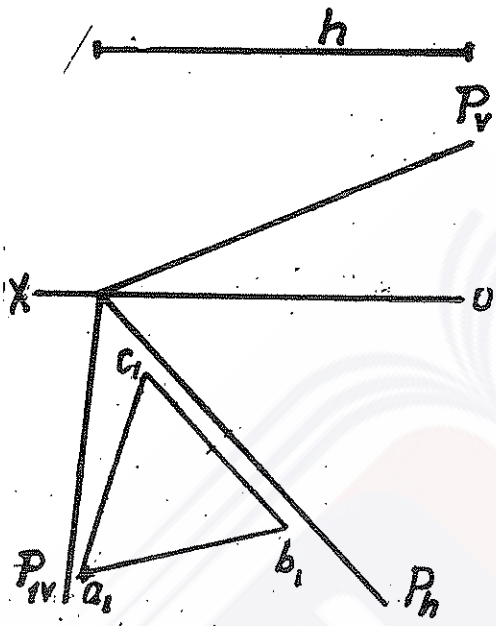

شكل رقم (٤٥٠)



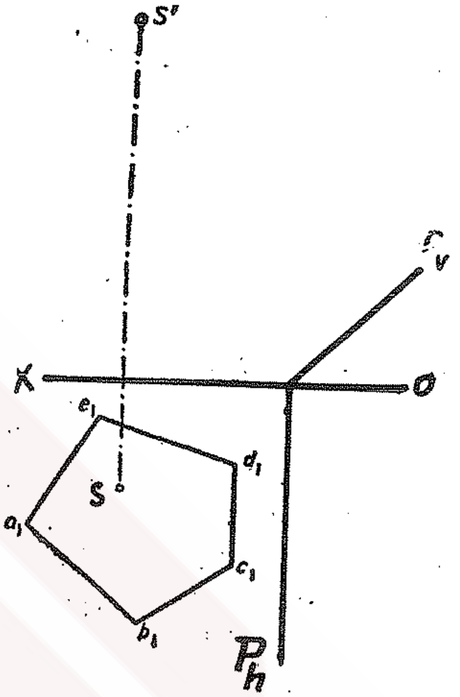

شكل رقم (٤٥١)




شكل رقم (٤٥٢)

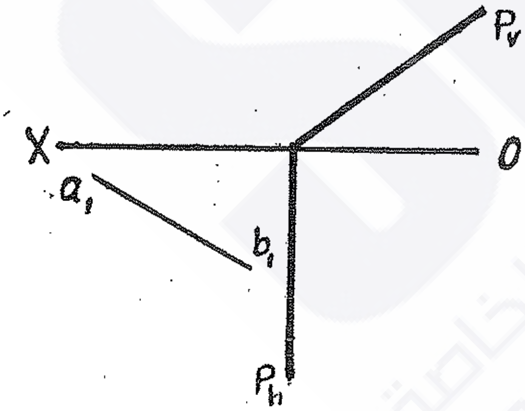



شكل رقم ( ٤٥٤ )




شكل رقم ( ٤٥٣ )

٢٨ـ مثل في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي المكعب الموضوع على مستو اسقاطي أمامي P اذا كان معلوما الوضع التطابقي الأفقي $a_1b_1$ لضلعه AB الواقع في المستوي P ( الشكل ٤٥٥ ) ٠




شكل رقم ( ٤٥٥ )

٢٩ـ استكمل في التعبير الاسقاطي الثنائي مسقطي المستقيم CD الذي يوازي المستقيم AB ويبعد عنه (٢٠) ملم مستخدما للحل :

آ ـ طريقة التدوير الانتقالي ( الانتقال الموازي ) .

ب ـ طريقة استبدال مستويات الاسقاط ( مجاميع الاسقاط المساعدة )

A(10,45,45) و B(50,25,15) و C(35,?,?) و D(85,20,?) .

٣٠ـ استخدام الطرق التالية :

آ ـ التدوير الانتقالي ( الانتقال الموازي ) .

ب ـ استبدال مستويات الإسقاط ( مجاميع الاسقاط المساعدة ) .

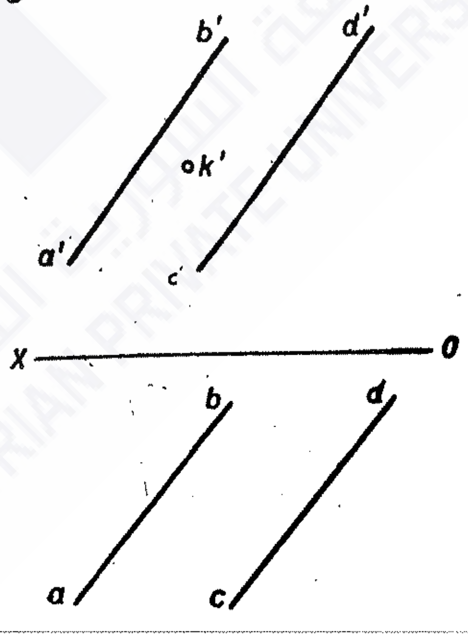
للتوصل الى تحديد المسقط الناقص للنقطة k الواقعة على بُعد (٢٥) ملم عن المستوي P المحدد :

١ـ بالمستقيم المار من النقطتين A(65,35,20) و B(10,20,70)

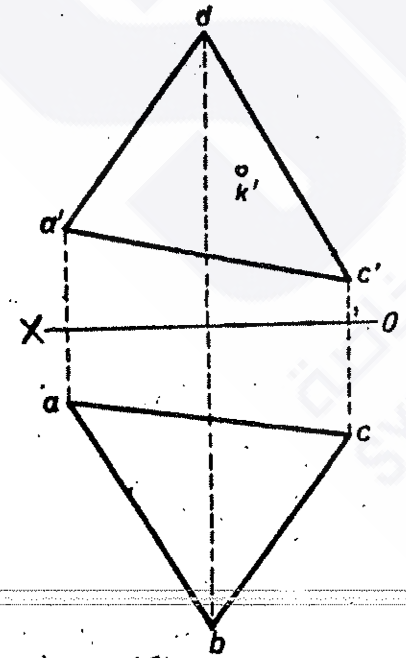
وبالنقطة C(50,45,65) . احداثيات النقطة K(20,50,?) .

٢ـ بالمستقيمين المتوازيين AB و CD ( الشكل ٤٥٦ ) .

٣ـ بالمثلث ABC ( الشكل ٤٥٧ ) .




شكل رقم ( ٤٥٦ )




شكل رقم ( ٤٥٧ )

٣١ـ استخدم : آ ـ طريقة التدوير الانتقالي ، ب ـ طريقة استبدال مستويات الاسقاط لتحديد المسافة بين النقطتين A و B :

١ـ (A(30,30,30 ٢ـ (A(40,30,30 ٣ـ (A(30,30,30 ٤ـ (A(25,-10,25

(B(10,20,-10 ، (B(10,10,15 ، (B(10,15,0 ، (B(10,15,-30

٣٢ـ حدد المسقط الناقص للنقطة B اذا كانت المسافة بين النقطتين A و B تساوي (٢٥) ملم • استخدم الطريقتين المذكورتين في السؤال السابق :

١ـ (A(30,25,40 و (B(10,?,25 ٢ـ (A(25,30,30 و(B(10,25,? •

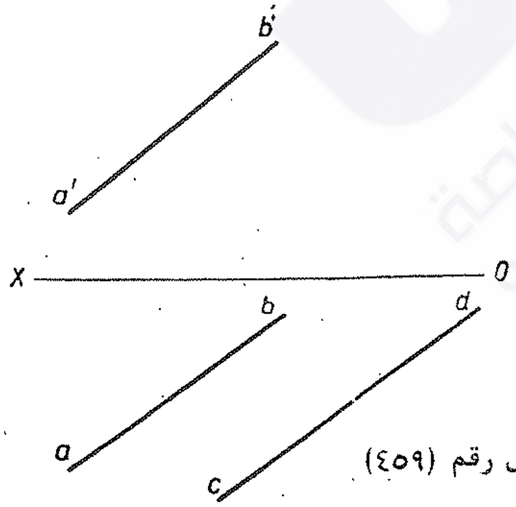
٣٣ـ حدد المسقط الناقص للنقطة A اذا كانت المسافة بين النقطة A والمستقيم BC تساوي (٢٥) ملم باستخدام :

آ ـ طريقة التدوير الانتقالي ، ب ـ طريقة استبدال مستويات الاسقاط

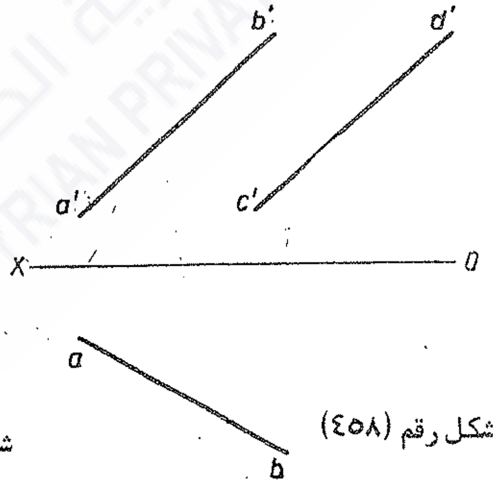
١ـ (?,A(20,10 و ( C(5,60,80 و (B(60,20,15 •

٢ـ (?,A(20,65 و (C(10,15,55 و (B(60,60,15 •

٣٤ـ حدد المسقط الناقص للمستقيم CD في التعبير الاسقاطي المستوي الثنائي اذا كان البعد بين المستقيمين المتوازيين CD و AB يساوي (٢٥) ملم ( الشكلان ٤٥٨و٤٥٩ ) • استخدم الطريقتين المذكورتين أعلاه•

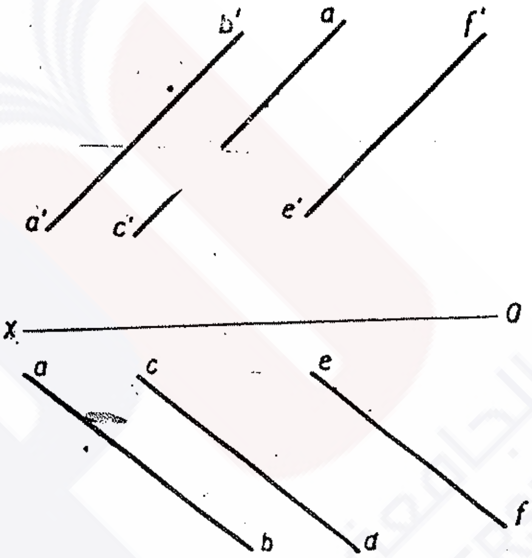



شكل رقم (٤٥٩)

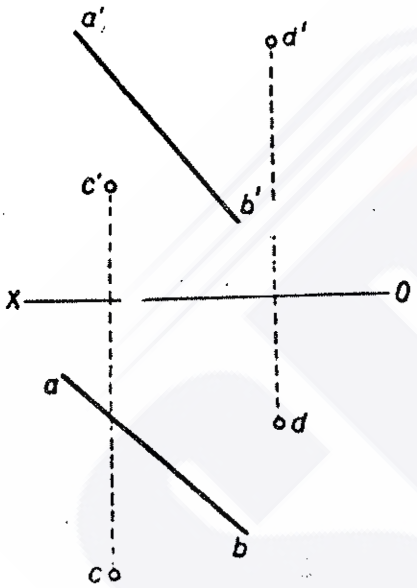



شكل رقم (٤٥٨)

٣٥ـ ارسم مسقطي المستقيم MN الذي يوازي المستقيمات AB و CD و EF ويبعد عنها بمسافات متساوية . استخدم في الحل : آ ـ طريقة التدوير الانتقالي ، ب ـ استبدال مستويات الاسقاط ( الشكل ٤٦٠ ) .




شكل رقم ( ٤٦٠ )




شكل رقم ( ٤٦١ )

٣٦ـ حدد مسقطي المستقيم MN الذي يوازي المستقيم AB ويبعد عنه وعن النقطتين C و D بُعد متساويا ( الشكل ٤٦١ ) .

٣٧ـ حدد الأثر الناقص للمستوي P(40,25,?) اذا كانت المسافة بين النقطة A(25,20,30) والمستوي P تساوي (٢٠) ملم .

٣٨ـ استخدام : ١ـ طريقة التدوير الانتقالي . ٢ـ طريقة استبدال مستويات الاسقاط . لتحديد : آ ـ المسافة بين المستقيمين المتخالفين AB و CD . ب ـ نقطة على المستقيم AB تبعد عن المستقيم CD مسافة (٢٠) ملم .

١ـ (A(100,15,30 و (B(50,60,65 و (C(60,20,20 و (D(0,55,70.

٢ـ (A(60, 50, 20 و (B(5,65,65 و (C(50,35,65 و (D(0,15,20.

٣٩ـ حدد المسافة بين المستويين المتوازيين(P(80,105,75 و (Q(45,60,40 .

٤٠ـ حدد المسافة بين المستقيمين المتوازيين AB و CD وارسم مسقطي المستقيم MN الذي يوازي المستقيمين ويبعد عن AB مسافة (٢٠) ملم وعن CD مسافة (٣٠) ملم .

١ـ (A(10,10,35) B(25,40,15) C(30,10,35) D(45,40,15.

٢ـ (A(10,25,40) B(35,5,10) C(25,40,40) D(50,20,10.

٤١ـ ارسم المحل الهندسي للنقاط الفراغية الواقعة على بعد (٢٥) ملم عن المستوي المحدد :

١ـ بأثريه : آ ـ (P(40,60,-60 ، ب ـ (P(40,30,-60 .

٢ـ بالمستقيم AB والنقطة C . حيث :

(A(60,50,30 و (B(10,10,65 و (C(50,25,65 .

٣ـ بالمثلث ABC . حيث :

(A(70,25,20 و (B(45,60,65 و (C(5,25,10

٤ـ بالمستقيمين المتوازيين AB و CD .

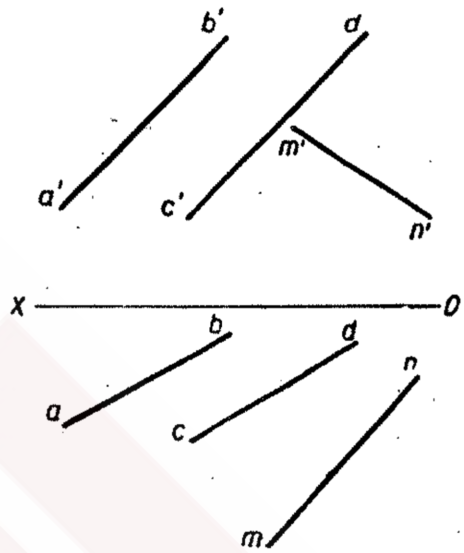
(A(10,10,30 و (B(25,40,15 و (C(30,10,35 و (D(45,40,15.

٤٢ـ حدد نقطة على المستقيم MN تبعد مسافة (٢٥) ملم عن المستوي P المحدد : آ ـ بالمستقيمين المتوازيين AB و CD ( الشكل ٤٦٢ ) .

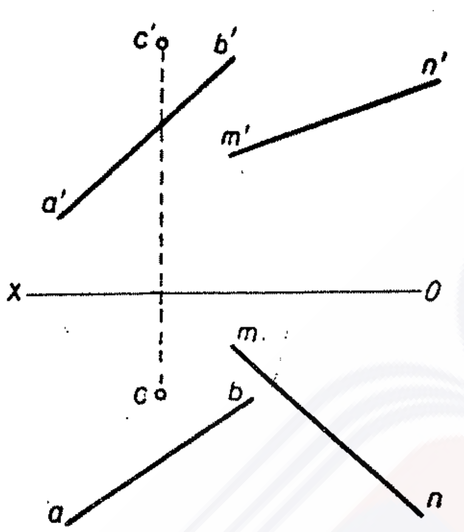
ب ـ بالمستقيم AB والنقطة C ( الشكل ٤٦٣ ).

جـ ـ بالمثلث ABC ( الشكل ٤٦٤ ) .

٤٣ـ حدد المسافة بين النقطة C والمستقيم AB وارسم مسقطي المستقيم




شكل رقم ( ٤٦٢ )

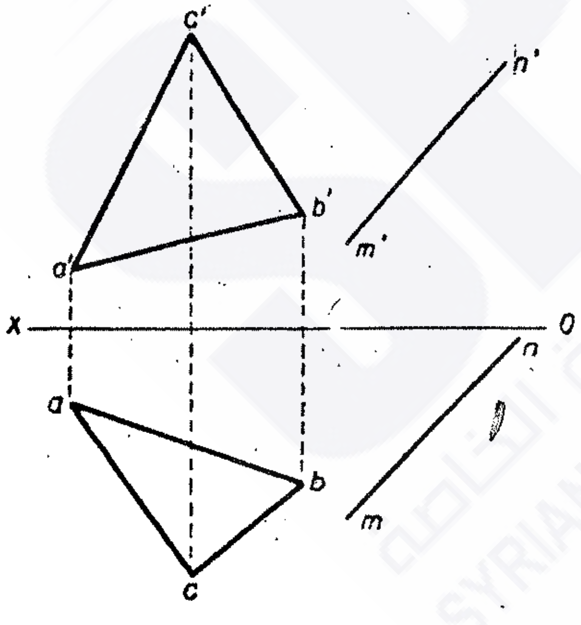



شكل رقم ( ٤٦٣ )

الذي يوازي MN ويبعد
عنه (٢٠) ملم وعن النقطة
C (٣٠) ملم .

١ــ C(10,20,25)
و B(15,20,45)
و A(80,60,30)

٢ــ C(90,30,45)
و A(55,50,60)
و B(10,10,10)




شكل رقم ( ٤٦٤ )

٤٤ــ حدد المسافة بين
النقطة K والمستوي P المحدد

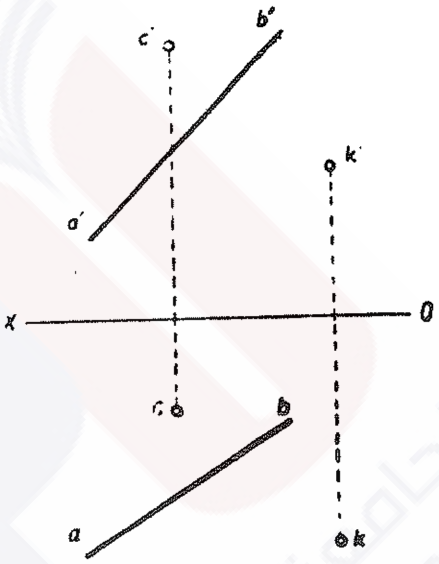
١ــ بأثريه P(30,50,-50) و K(0,30,45) .

٢ـ بالمستتقيم AB والنقطة C ( الشكل ٤٦٥ ) .

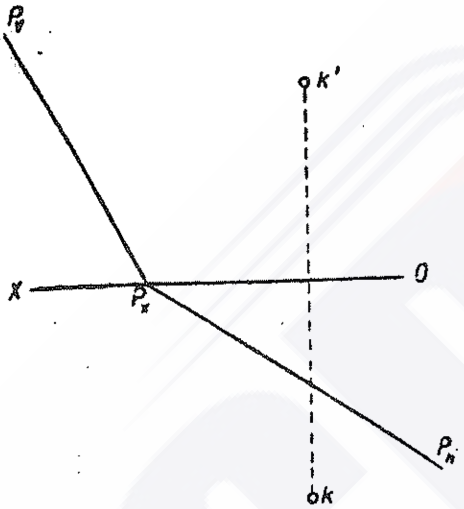
٣ـ بأثريه ( الشكل ٤٦٦ ) .

٤ـ بالمثـــلث ABC ( الشكل ٤٦٧ ) .

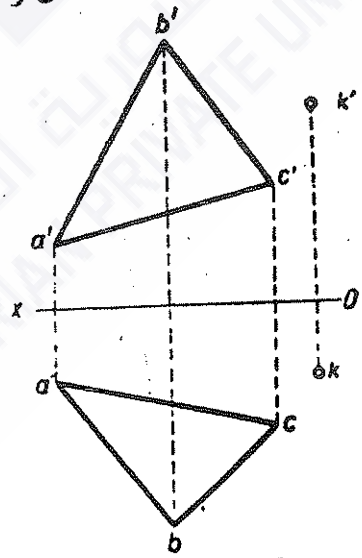
٥ـ بالمستقيمين المتوازيين AB و CD ( الشكل ٤٦٨ ) .



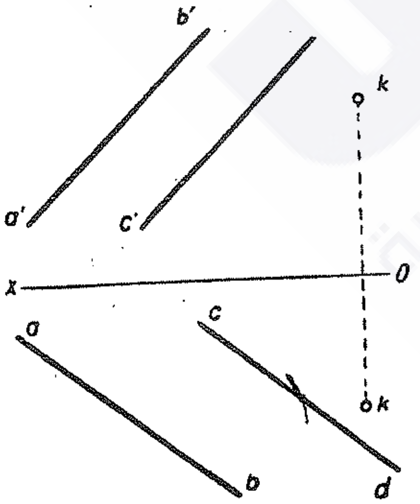
شكل رقم (٤٦٥)



شكل رقم (٤٦٦)



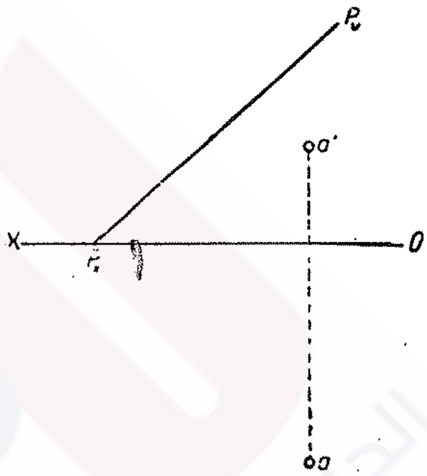
شكل رقم (٤٦٧)



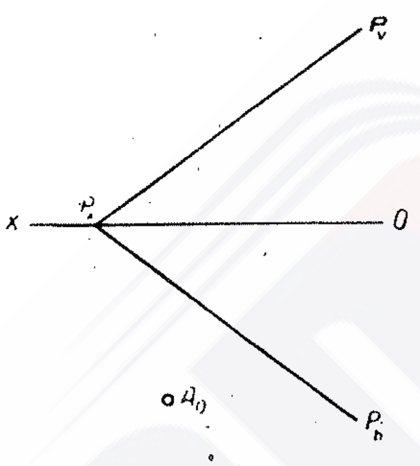
شكل رقم (٤٦٨)

٤٥ـ طابق المستوي P مع المستوي H وحدد الوضع التطابقي للنقطة المنتمية للمستوي P ( الشكل ٤٦٩ ) .

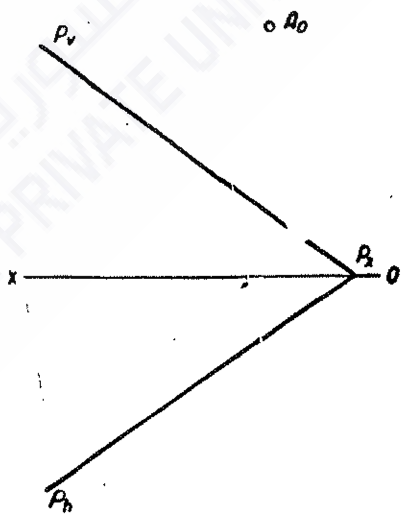
٤٦ـ ارسم مساقط النقطة A المنتمية للمستوي P اذا عرف وضعها التطابقي $A_o$ مع المستوي H ( الشكل ٤٧٠ ) .



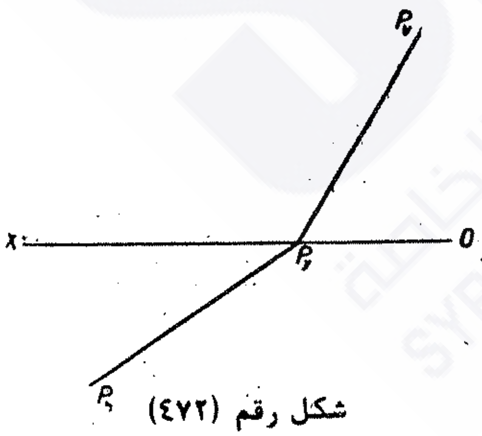

شكل رقم (٤٦٩)




شكل رقم (٤٧٠)



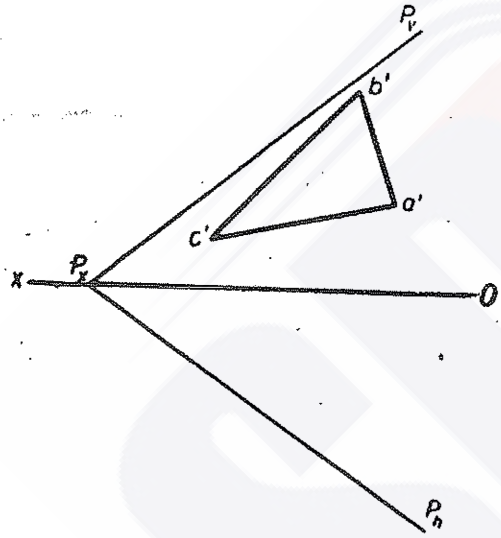

شكل رقم (٤٧١)



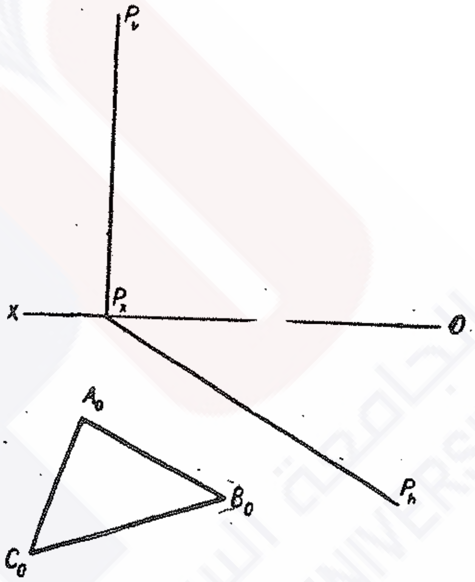

شكل رقم (٤٧٢)

٤٧ـ ارسم مساقط النقطة A المنتمية للمستوي P اذا علم وضعها التطابقي $A_o$ مع المستوي V ( الشكل ٤٧١ ) .

٤٨ـ ارسم في المستوي P المحل الهندسي للنقاط الواقع على بُعد واحد عن أثري المستوي $P_h$ و $P_v$ ( الشكل ٤٧٢ ) .




شكل رقم ( ٤٧٤ )




شكل رقم ( ٤٧٣ )

٤٩ـ ارسم مسقطي المثلث ABC المنتمية للمستوي P ، اذا علم وضعه التطابقي $A_oB_oC_o$ مع المستوي H ( الشكل ٤٧٣ ) .

٥٠ـ ارسم المحل الهندسي للنقاط الفراغية الواقعة على بُعد واحد عن رؤوس المثلث ABC ( الشكل ٤٧٤ ) .

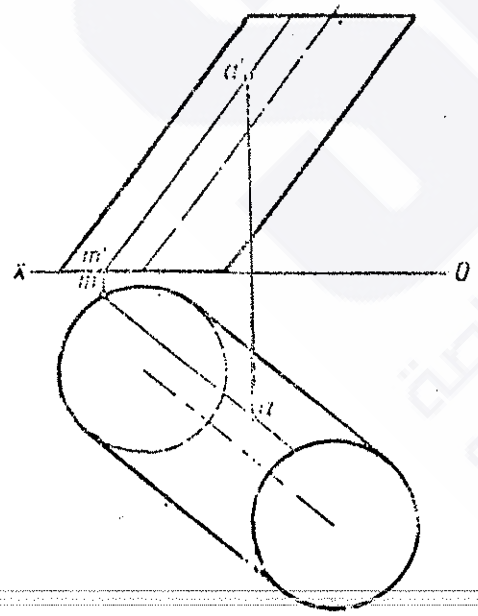
# الفصل الثامن

## منحنيات السطوح

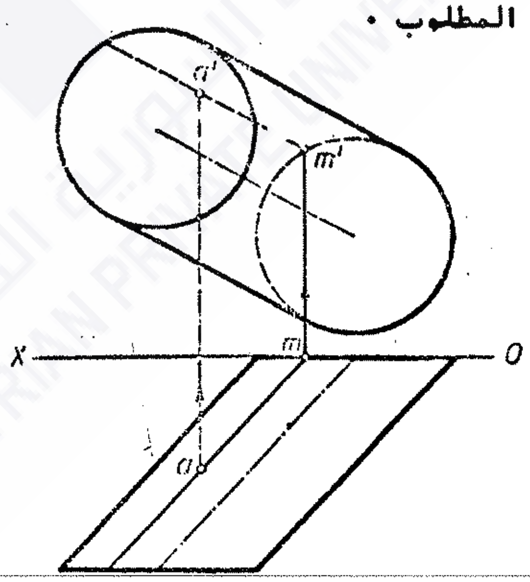
### أولا ــ التعبير الاسقاطي لمنحنيات السطوح : ( أمثلة تطبيقية )

**مثال ١** : حدد نقطة كيفية A على سطح الاسطوانة المائلة.( الشكل ٤٧٥ ).

**الحل** : النقطة الواقعة على سطح ما تقع على أحد الخطوط أو المستقيمات المنتمية لهذا السطح ، ولهذا نختار نقطة كيفية ($m_1m'$) على قاعدة السطح الاسطواني ونرسم من هذه النقطة مستقيما مولدا مساعد ونأخذ عليه نقطة كيفية ($a_1a'$) . هذه النقطة تكون واقعة على السطح الاسطواني ، وهو المطلوب .




شكل رقم (٤٧٥)




شكل رقم (٤٧٦)

**مثـــال ٢** : حدد المسقط الأمامي للنقطة A الواقعة على السطح الاسطوانـــي المائل اذا كان معلوما مسقطها الأفقي ، ( الشكل ٤٧٦ ) ٠

**الحـــل** : بما أن النقطة A واقعة على السطح الاسطواني فهي تقع على أحد خطوطه أو مستقيماته ٠ واذا كانت النقطة A واقعة على مستقيم فان مساقطها تقع على المساقط المماثلة للمستقيم ، لذلك نمرر من النقطة A مستقيمــا مولدا مساعدا MA فيكون مسقطه الأفقي ma موازيا للمساقط الأفقيـــة للمستقيمات المولدة للسطح الاسطواني ويمر من المسقط الأفقي a للنقطة A ويقطع المسقط الأفقي لقاعدة الاسطوانة في النقطة m ٠ نحدد المسقط الأمامي m'a' للمود المساعد والذي يكون موازيا للمساقط الأمامية للمستقيمـــات المولدة ومحور الاسطوانة ونحدد على هذا المستقيم وفق قواعد الاسقاط العامة المسقط الأمامي a' للنقطة A ٠ وهو المطلوب ٠

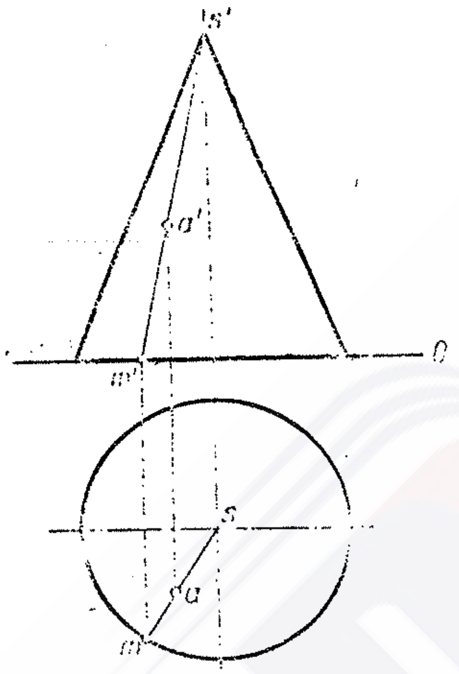
**مثـــال ٣** : حدد نقطة كيفية A على سطح المخروط الدائري ٠

**الحـــل** : كما في الأمثلة السابقة ، النقطة الواقعة على السطح المخروطـي تقع على أحد الخطوط أو المستقيمات الواقعة عليه ٠

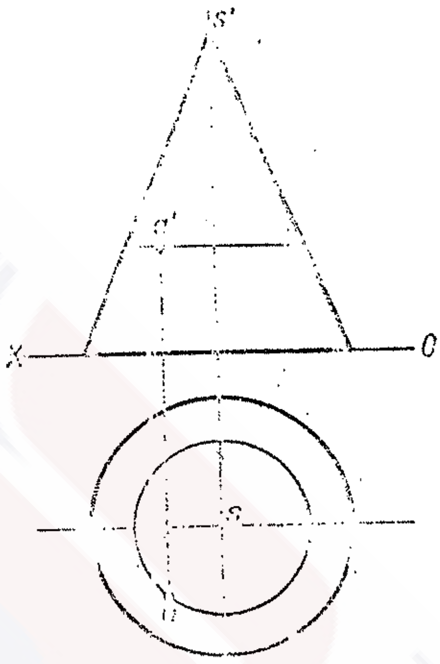
لحل هذا المثال هناك عدة طرق ، أبسطها الطريقتان التاليتان :

**الطريقة الأولى ( الشكل ٤٧٧ )** : نأخذ نقطة كيفية (m,m') على قاعـــدة المخروط ونحرر منها مستقيما مساعدا (ms,m's') ، فتكون أي نقطة واقعة على هذا المستقيم هي نقطة واقعة على السطح المروطي ٠ ولهذا نختار نقطة ( aa' ) واقعة عليه ونحدد مساقطها ، فتكون هي النقطة المطلوبة ٠

**الطريقة الثانية ( الشكل ٤٧٨ )** : نرسم على السطح المخروطي خطا دائريـــا




شكل رقم ( ٤٧٧ )



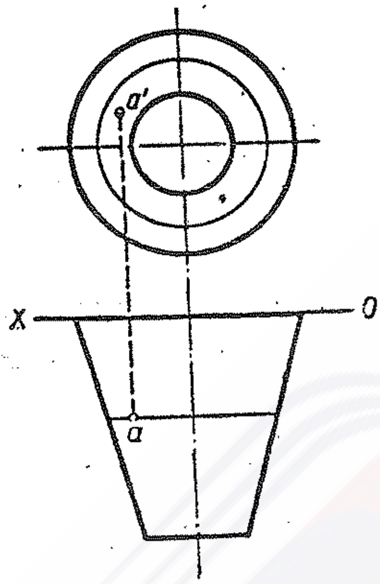

شكل رقم ( ٤٧٨ )

مساعدا يوازي قاعدة المخروط فيكون مسقطه الأمامي خطا مستقيما موازيا للمسقط الأمامي لقاعدة السطح المخروط ، المنطبق على خط الأرض ۰ ومسقطه الأفقي دائرة كما هو موضح في الشكل اعلاه ۰ وتمثل أي نقطة من نقاط هذا الخط النقطة المطلوبة وتقع مساقطها (a a') على المساقط المماثلة للخط الدائري ۰

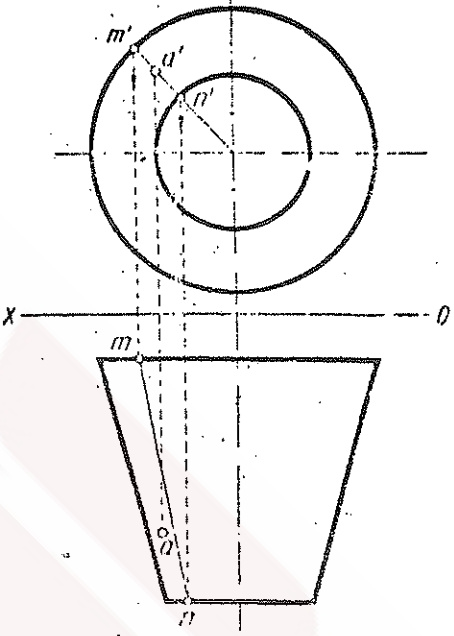
**مثال ٤** : هل تقع النقطة A على سطح المخروط الدائري المقطوع ؟

**الحل** : لهذا المثال أكثر من طريقة واحدة للحل ، نختار طريقتين منها :

**الطريقة الأولى ( الشكل ٤٧٩ )** : اذا كانت النقطة A منتمية للسطح المخروط فانها تقع على أحد الخطوط أو المستقيمات المنتمية لهذا السطح أيضا ۰ فاذا افترضنا أن النقطة A واقعة على السطح المخروطي




شكل رقم ( ٤٧٩ )




شكل رقم ( ٤٨٠ )

فسيكون بامكاننا امرار خط دائري واقع على السطح المخروطي من النقطة A على هذا الأساس نمرر من من النقطة A خطا مستقيما يوازي خـــط الأرض فيمثل هذا الخط المسقط الأفقي لخط دائري مساعد منتم للسطح المخروطـي ( مركزه متطابق مع مركز السطح المخروطي ) . نحدد المسقط الأمامي لهـذا الخط وفق قواعد الاسقاط العامة . اذا كانت النقطة A واقعة فعلا عــلى السطح المخروطي فان المسقط الأمامي 'a لها يجب أن يكون واقعا عــلى المسقط الأمامي للخط الدائري . ولكننا نلاحظ من الشكل أن ذلك غيـــر محقق ، وهذا يعني أن النقطة A لاتقع على السطح المخروطي المقطوع .

**الطريقة الثانية ( الشكل ٤٨٠ )** : كما في الطريقة الأولى ، نفـــترض أن النقطة A منتمية للسطح المخروطي ولهذا نمرر منها مستقيما مولـــدا مساعدا MN ، ولكي يكون هذا الافتراض صحيحا لابد وأن تتطابق مساقـــط

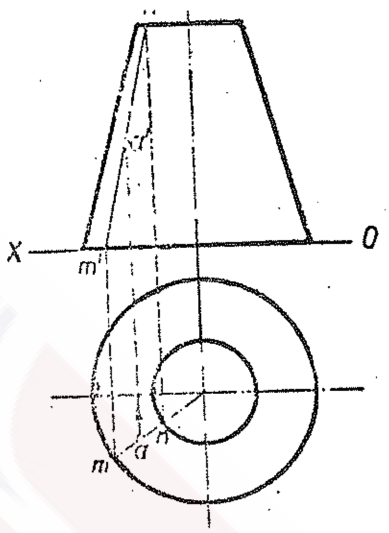
النقطة A مع مساقط المستقيم MN المتماثلة . لهذا نمرر من المسقط الأمامي للنقطة a مستقيما مارا من مركز السطح المخروطي فيقطع مسقطي قاعدته العليا والسفلى في النقطتين mn للمستقيم MN .-اذا كان افتراضنا صحيحا فان المسقط الأفقي للنقطة a يجب أن يتطابق مع mn وهو مالم يتحقق في الشكل المبين . وهذا يعني أن النقطة A غير منتمية للسطح المخروطي .

**مثال ٥ :** حدد المسقط الأمامي للنقطة A المنتمية للسطح المخروطي الدائري الناقص ( المقطوع ) .

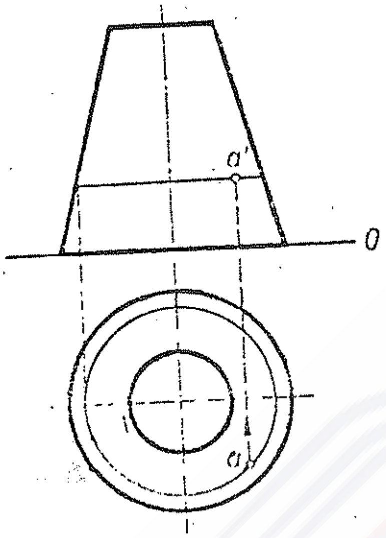
**الحل :** كما في الأمثلة السابقة ، هناك أكثر من حل لهذه المسألة،نختار طريقتين منها :

**الطريقة الأولى ( الشكل ٤٨١ ) :** بما أن النقطة A واقعة على السطح المخروطي ، فهي تقع على أحد خطوطه أو مستقيماته . لذلك نمرر من النقطة a مستقيما مارا من مركز السطح المرخوطي فيقطع المساقط الأفقية لقاعدتني السطح المخروطي في النقطتين m و n . نوجد المساقط الأمامية n',m' ونوصل بينهما فنحصل على المسقط الأمامي لمستقيم ينتمي للسطح المخروطي ويمر من النقطة A ، وهذا يعني أن المسقط الأمامي في النقطة a' يقع على m'n' ولهذا نقيم من النقطة a خط تداع على خط الأرض فيقطع m'n' في النقطة a' وهي المسقط الأمامي المطلوب للنقطة A .

**الطريقة الثانية ( الشكل ٤٨٢ ) :** نمرر من النقطة $A(a_1a')$ مستويا يوازي مستوي الاسقاط الأفقي H فيقطع السطح الجانبي للمخروط الناقص بدائرة



شكل رقم (٤٨١)

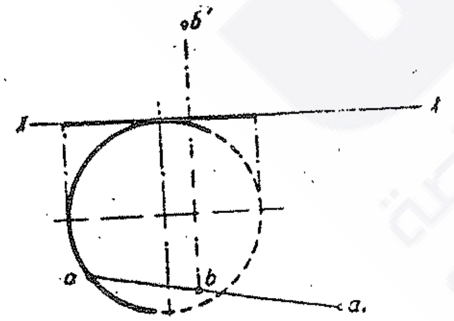


شكل رقم (٤٨٢)

فتقع النقطة A عليها لكونها احدى نقاط هذا السطح . المسقط الأفـــقي للنقطة A ينتمي الى المسقط الأفقي لخط التقاطع الذي يكون دائريا أيضـــا وبمركز واحد مع السطح المخروطي . نحدد المسقط الأمامي 'a للنقطـــة A وفق قواعد الاسقاط العامة فيكون هذا المسقط واقعا على المسقط الأمـــامي لخط تقاطع المستوي المساعد مع سطح المخروط .

ب ـ تمـــارين تطبيقيـــة :

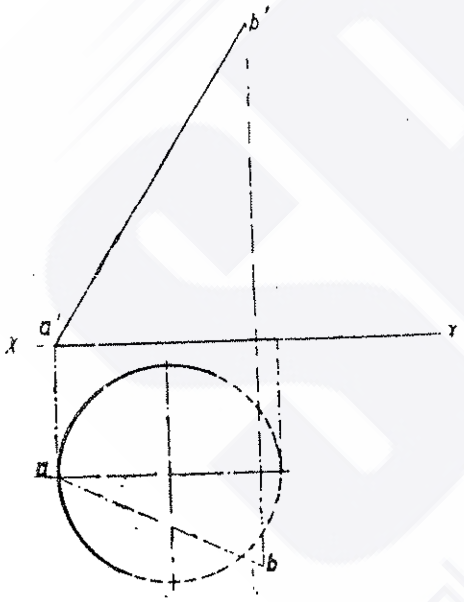
١ـ استكمل في التعبير الاسقاطي الثنائي مساقط السطـــح الاسطواني اذا كان معلومـــا مسقطا قاعدته والمسقـــط الأفقي $aa_1$ لمولده . النقطة B تقع على سطح الاسطوانة ( الشكل ٤٨٣) .



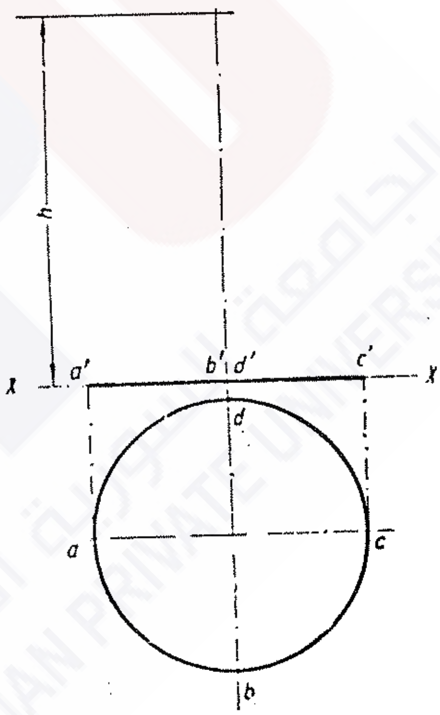
شكل رقم (٤٨٣)

٢ـ استكمل في التعبير الاسقاطي الثنائي مساقط السطح الاسطواني اذا علم مساقط قاعدته وارتفاعه وحدد على سطحه الجانبي نقطة منتمية له M ، الشكل ( ٤٨٤ ) .

٣ـ استكمل في التعبير الاسقاطي الثنائي مساقط السطح الاسطواني المائل اذا علمت مساقط قاعدته واتجاه مولده ٠ حدد على سطحه الجانبي نقطة كيفية C منتمية له ، شكل ( ٤٨٥ ) .




شكل رقم ( ٤٨٥ )



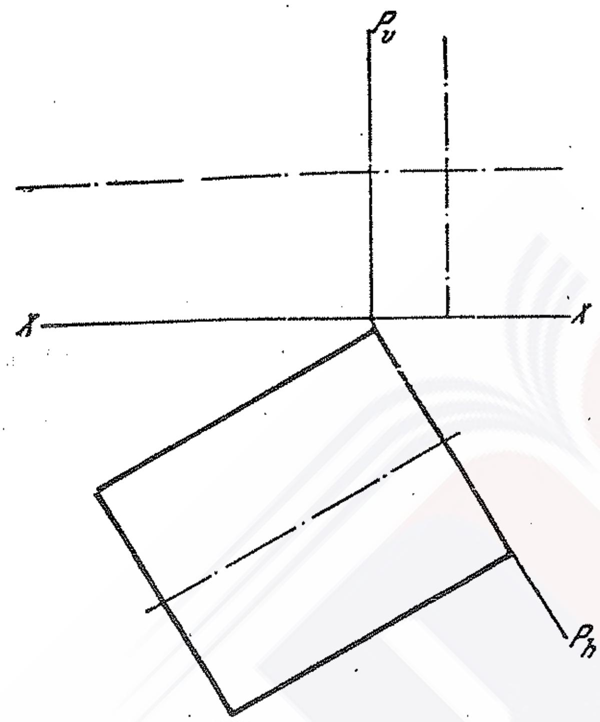

شكل رقم ( ٤٨٤ )

استكمل في التعبير الاسقاطي الثنائي مساقط السطح الاسطواني المستند بقاعدته على المستوي الاسقاطي الأفقي P اذا علم مسقطه الأفقي ، الشكل ( ٤٨٦ )

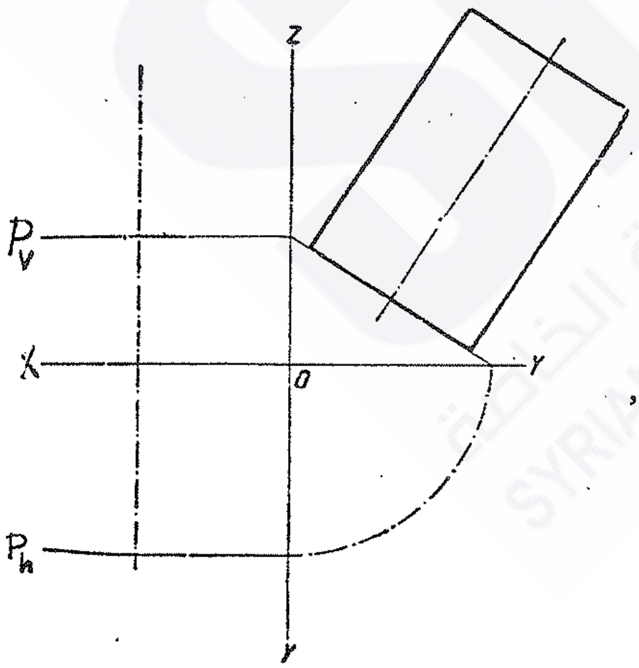
٥ـ استكمل في التعبيـــــر الاسقاطي الثلاثي مساقط السطح الاسطوانـــــي المستند بقاعدته عـــلى المستوي الاسقاطـــــي الجانبي P ، كمـــا في الشكل ( ٤٨٧ ) ٠

٦ـ ارسم في التعبير الاسقاطي الثنائي المخروط المستند بقاعدته على مستـــوي الاسقـــــاط الأمـــــامي V وبقمتـــــه S على مستوي الاسقـــاط الأفقي H اذا كان معلوما الموقع الفراغي لقمتـــه ومركز قاعدته ومقـــدار نصف قطرها S (5,50,0), 0,(50,0,30), R = 20 mm

حدد موقع نقطة كيفية M واقعة على سطحه ٠



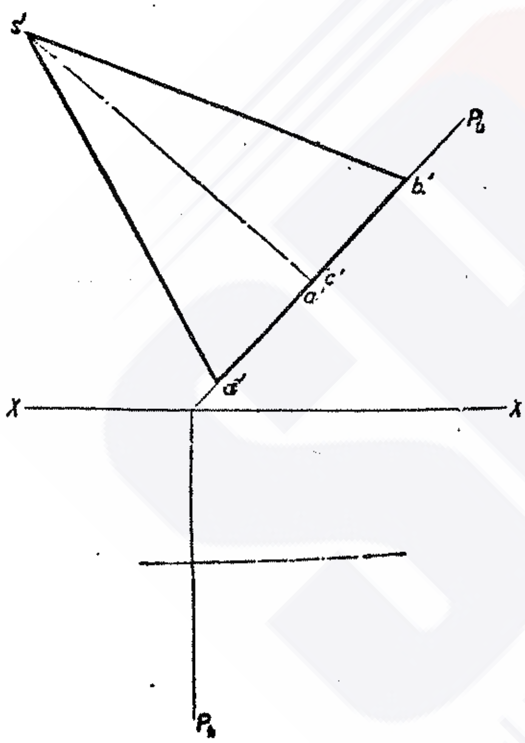

شكل رقم ( ٤٨٦ )



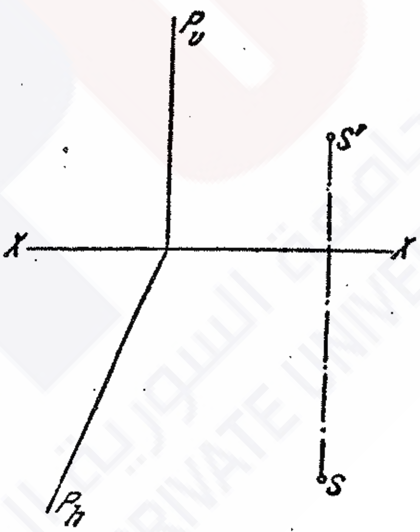

شكل رقم ( ٤٨٧ )

٧ـ ارسم في التعبير الاسقاطي الثنائي المحل الهندسي للمستقيمات المـــارة في النقطة S والمائلة على المستوي P ، الشكل (٤٨٨)، بزاويــة 60° درجة ٠

٨ـ استكمل في التعبير الاسقاطي الثنائي مساقط المخروط المستنـــــــد بقاعدته على المستوي الاسقاطي الأمامي P المحدد بآثاره اذا كــــــان معلوما المسقط الأمامي للمخروط ( الشكل ٤٨٩)٠




شكل رقم ( ٤٨٩ )

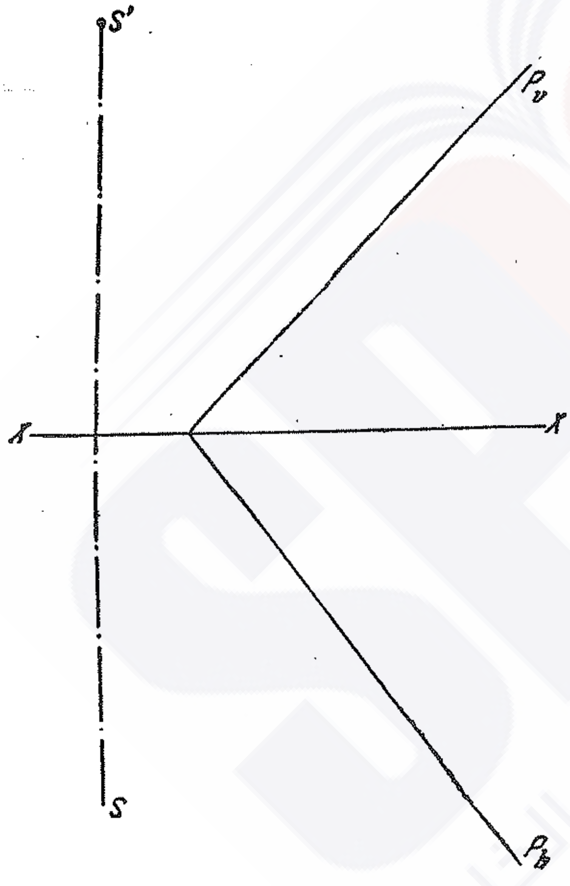



شكل رقم ( ٤٨٨ )

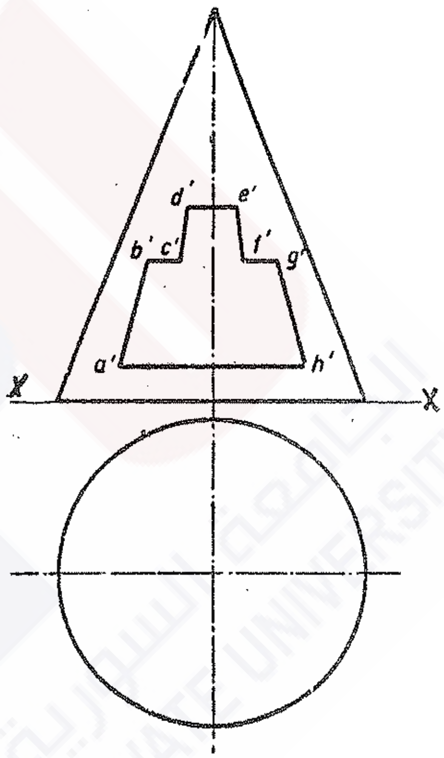
٩ـ ارسم في التعبير الاسقاطي الثنائي السطح المخروطي المستند بقاعدتـــه على المستوي P اذا علم موقع قمته S واذا كان قطر قاعدتـــــه d يساوي $\frac{3}{4}$ ارتفاعه ( $d = \frac{3}{4} h$ ) و P(40,30,20) و S(30,30,50) .

١٠ـ ضع على المستوي P سطحا مخروطيا قمته S والزاوية الكبرى بين مستقيماته المولدة ( ٣٠° )، ( الشكل ٤٩٠ ) .

١١ـ استكمل مساقط الشكل ABCDEFG الواقع على السطح المخروطي في التعبير الاسقاطي الثلاثي ( الشكل ٤٩١ ) .




شكل رقم ( ٤٩٠ )




شكل رقم ( ٤٩١ )

## ثانيا – تقاطع منحنيات السطوح مع مستوي وتماسها :

### مقـــــدمة :

لانشاء خط تقاطع سطح ما مع مستو من الضروري أن نجد مجموعة نقاط تنتمي بآن واحد للسطح وللمستوي بعدها نصل هذه النقاط بخط مستمر .

للحصول على نقطة كيفية من خط التقاطع نعمد لمايلي :

١– ننشئ مستويا مساعدا .

٢– نعين خط تقاطع هذا المستوي مع السطح ومع المستوي المعطى .

٣– أمكنة تقاطع هذين الخطين تعين لنا النقاط المطلوبة ( عادة نقطتين ).

وهكذا على التوالي بأخذ مجموعة مستويات مساعدة يمكننا تعيين العدد اللازم من النقاط .

* ملاحظـــة : يختار المستوي المساعد بحيث تكون مساقط خط تقاطعه مع السطح على مستويات الاسقاط بشكل خطوط بسيطة – مستقيم أو دائرة .

اذا كان السطح المفروض ذا مولدات مستقيمة فان خط التقاطع يتعين كذلك برسم مجموعة مولدات على ذلك السطح ثم بوصل نقاط تقاطع هذه المولدات مع المستوي بخط مستمر .

* مقطع اسطوانة :

ان أي مستوي يقطع سطح اسطوانة دائرية قائمة :

١– وفق دائرة اذا كان المستوي عموديا على محور الاسطوانة .

٢– وفق قطع ناقص اذا كان المستوي مائلا على محور الاسطوانة .

٣– وفق مولدين اذا كان المستوي موازيا لمحور الاسطوانة ويبعد عنه

بمسافة $\ell$ أصغر من نصف قطر الاسطوانة ٠

٤ـ وفق مولد واحد اذا كان المستوي موازيا لمحور الاسطوانة ويبعد عنه بالمسافة $\ell$ المساوية لنصف قطر $r$ للاسطوانة ( المستوي مماس لسطح الاسطوانة ) ٠

* **مقطع مخروط :**

نرمز لزاوية ميل مولد المخروط على القاعدة ب $\alpha$ ولزاوية ميل المستوي على قاعدة المخروط بـ ٠

ان أي مستو مار من ذروة مخروط دائري قائم يقطع سطحه :

١ـ في نقطة اذا كانت $\varphi$ أصغر من $\alpha$ ٠

٢ـ وفق مولد واحد اذا كانت $\varphi = \alpha$ أي عندما يكون المستوي مماسا لسطح المخروط ٠

٣ـ وفق مولدين اذا كانت $\varphi$ أكبر من $\alpha$ أو $\alpha = 90°$ أي عندما يمر المستوي من محور المخروط ٠

ان أي مستو لايمر من رأس المخروط الدائري القائم يقطع سطحه :

١ـ وفق دائرة اذا كان المستوي عموديا على محور المخروط ، أي أن : $\varphi = 0$

٢ـ وفق قطع ناقص اذا كانت $\varphi$ أصغر من $\alpha$ ٠

٣ـ وفق قطع مكافئ اذا كانت $\alpha = \varphi$ ، أي اذا كان المستوي يوازي أحد مولدات المخروط ٠

٤ـ وفق قطع زائد اذا كانت $\varphi$ أكبر من $\alpha$ أو $90° = \varphi$ ، أي عندما يكون المستوي موازيا لمحور المخروط ٠

* **ملاحظة** : لاظهار خط التقاطع عندما يكون المستوي القاطع عاما يدّور

المستوي حول محور المخروط حتى يصبح اسقاطيا أماميا اذا كان محور المخروط عموديا على مستوي الاسقاط الأفقي أو اسقاطيا أفقيا اذا كان محور المخروط عموديا على مستوي الاسقاط الأمامي ٠

* **مقطع الكرة :**

ان أي مستو يقطع سطح الكرة وفق دائرة اذا كانت المسافة $\ell$ بين المستوي ومركز الكرة أصغر من نصف قطر هذه الكرة R ٠

في حالة خاصة يكون المستوي مماسا لسطح الكرة اذا كانت $\ell = R$ ٠

* **ملاحظة** : ان أي سطح دوراني يُقطع وفق دائرة اذا كان المستوي القاطع عموديا على محوره ٠

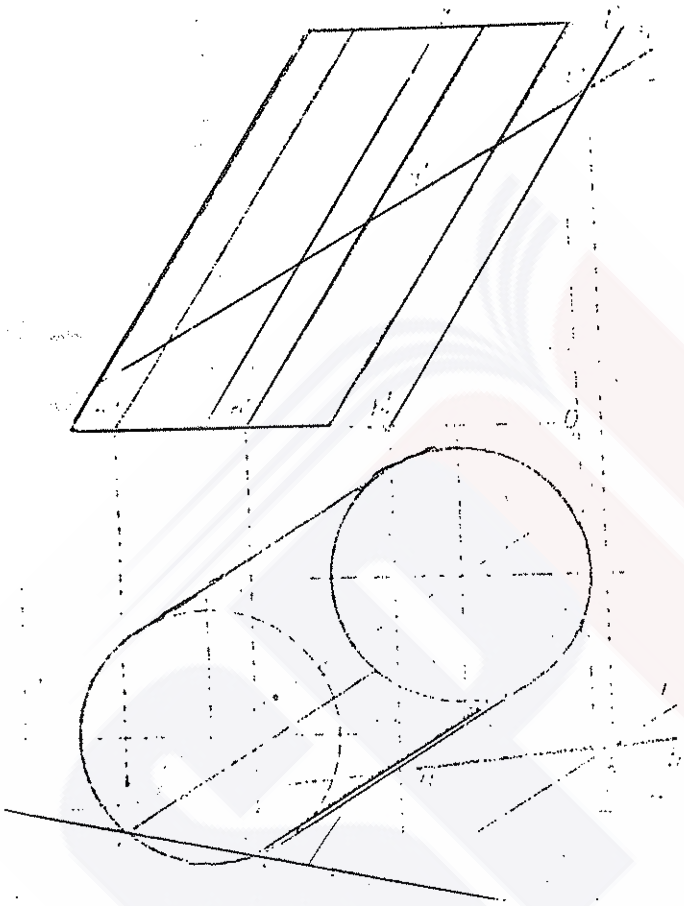
## آ ـ أمثلة تطبيقية :

**مثال ١** : مرر من المستقيم AB مستويا يقطع سطح الاسطوانة المائلة وفق المولدات ، ثم حدد هذه المولدات ٠ الشكل ( ٤٩٢ ) ٠

**الحل** : نأخذ على المستقيم (ab,a'b') نقطة كيفية (k,k') ونرسم منها المستقيم (kl,k'l') موازيا لمحور الاسطوانة ٠ وبذلك يحدد المستقيمان AB و KL المستوي المطلوب ٠ بعد ذلك نوجد الآثار الأفقية لهذين المستقيمين (h,h') و $(h_1,h_1')$ ونصل $h,h_1$ فنحصل على الأثر الأفقي للمستوي المطلوب $(P_h)$ ونحصل من تقاطعه مع المسقط الأفقي لقاعدة الاسطوانة على نقطتين ( m و n ) من هذه النقاط ، ووفق قواعد الاسقاط نرسم المولدات المطلوبة ٠

**مثال ٢** : مرر من النقطة A مستويا لسطح الاسطوانة المائلة المبينة

في الشكل ( ٤٩٣ ).

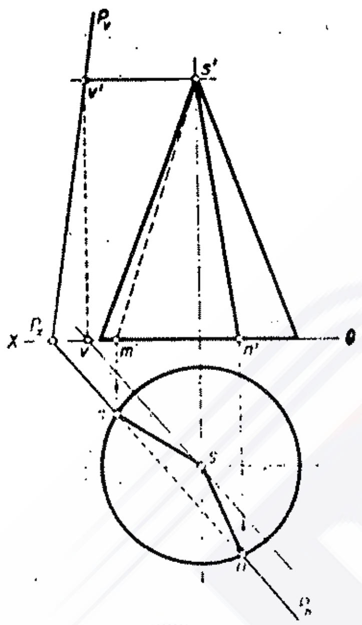


شكل رقم ( ٤٩٢ )

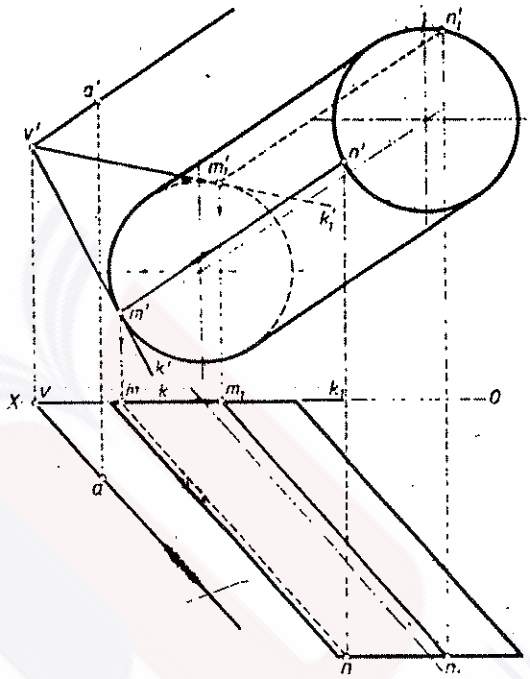
**الحل** : نرسم من النقطة $(a_1a')$ مستقيما يوازي محور الاسطوانة ، ونعين أثره الأمامي $(v,v')$ . من النقطة $v'$ نرسم المستقيمين $v'k_1'$ و $v'k'$ بحيث يمسان المسقط الأمامي لقاعدة الاسطوانة عند النقطتين $m_1'$ و $m'$ . من النقطتين $(m_1,m_1')$ و $(m,m')$ نرسم المولدات المماسية $(mn,m_1'n_1')$ و $(mn,m'n')$ . ان المستقيمات $(vk_1,v'k_1')$ و $(vk,v'k')$ وخطوط التماس الموافقة تحدد لنا المستويات المطلوبة .

**مثال ٣** : أرسم مستويا في حالته العامة يقطع سطح المخروط وفق المولدات ثم أوجد هذه المولدات ، ( الشكل ٤٩٤ ) .

**الحل** : مستوي القطع P يجب أن يمر من قمة المخروط المحدد



شكل رقم ( ٤٩٤ )



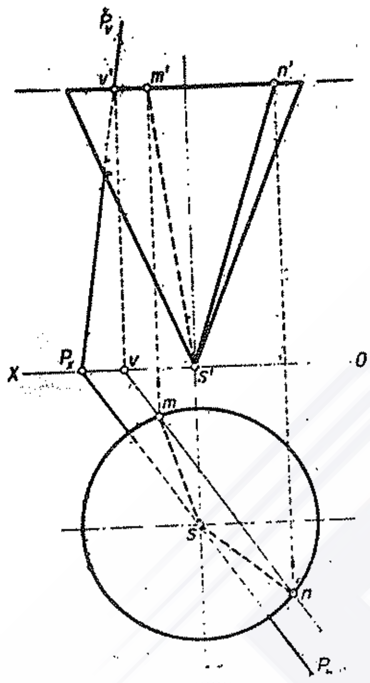
شكل رقم ( ٤٩٣ )

بالنقطة (s,s') . من هذه النقطة نرسم مستقيما أفقيا ما ونعين أثره الأمامي (v,v') . من نقطة كيفية $P_x$ على محور الاحداثيات نرسم آثار المستوي $P_v$ و $P_h$ . المستوي P يقطع قاعدة المخروط عبر الوتر (mn,m'n') . بوصل قمة المخروط (s,s') بنهايات الوتر (n,n') و (m,m') نحصل على المولدات المطلوبة (sn,s'n') و (sm,s'm') .

* **ملاحظة :** يمكن اختيار $P_x$ بحيث يمس الأثر الأفقي ($P_h$) للمستوي قاعدة المخروط عندها يصبح المستوي مماسا لسطح المخروط .

**مثال ٤ :** لدينا مخروط والأثر الأمامي للمستوي P الذي يقطع سطح المخروط بمستقيمات مولدة ، أوجد هذه المولدات ( الشكل ٤٩٥ ) .

**الحـــل** : بما أن المستوي P يجب أن يمر من قمة المخـــروط (s,s') المرتكزة ( الموجودة ) في مستـــوي الاسقاط الأفقي H ، لذا نرسم الأثـــر الأفقي ($P_h$) للمستوي بحيث يمر مـــن النقطتين $P_x$ و S • نحدد نقـــاط تقاطع المستوي P مع قاعدة المخروط الدائرية (m,m') و (n,n') • نصـــل بين هذه النقاط وقمة المخروط (s,s') لنحصل على المولدات المطلوبـــــة (sm,s'm') و (sn,s'n')

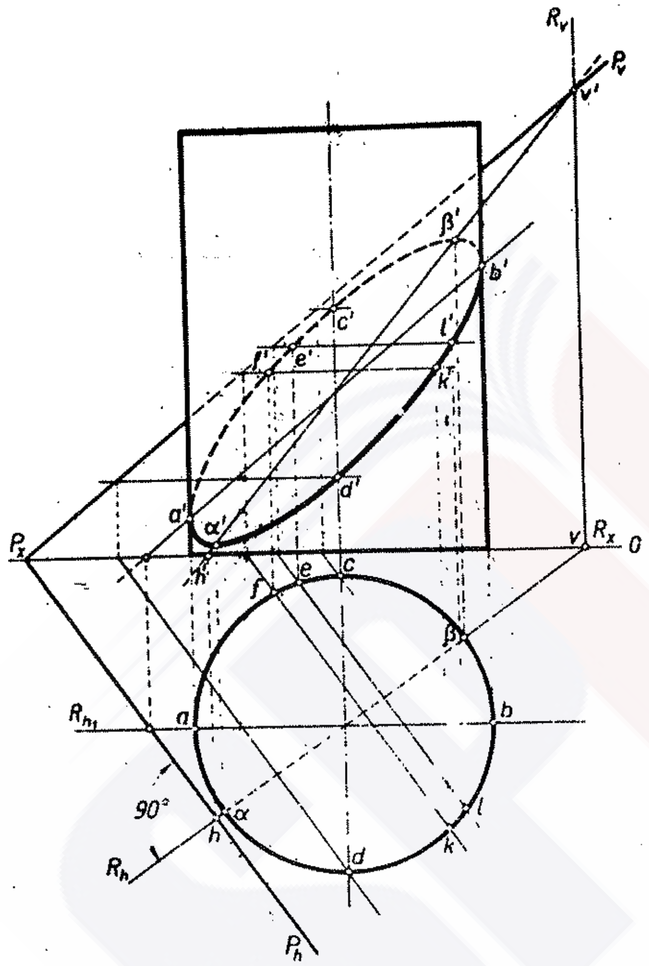



شكل رقم (٤٩٥)

**مثـــال ٥** : ارسم مساقط خط تقاطع المستوي P مع سطح الاسطوانة ، شكل ( ٤٩٦ ) •

**الحـــل** : نرسم من محور الاسطوانه المسقط الأفقي للمستوي R العمـــودي على المستوي P • المستوي R يقطع سطح الاسطوانة وفق المولدات ويقطـــع المستوي P وفق المستقيم (hv,h'v') ومكان تقاطع هذه المستقيمات نجـــد النقطة الدنيا ($\alpha,\alpha'$) والنقطة العليا ($\beta,\beta'$) من خط التقاطع • من محـــور الاسطوانة ننشئ مستويا $R_1$ موازيا لمستوي الاسقاط الأمامي • المستوي $R_1$ يقطع سطح الاسطوانة وفق المولدات الجانبية والمستوي P وفق مستقيـــم جبهي ، ومكان تقاطع هذه المستقيمات نجد النقاط (a,a') و (b,b') مـــن خط التقاطع • نحدد نقاط تقاطع المولدات الجانبية للاسطوانة مع المستوي P •

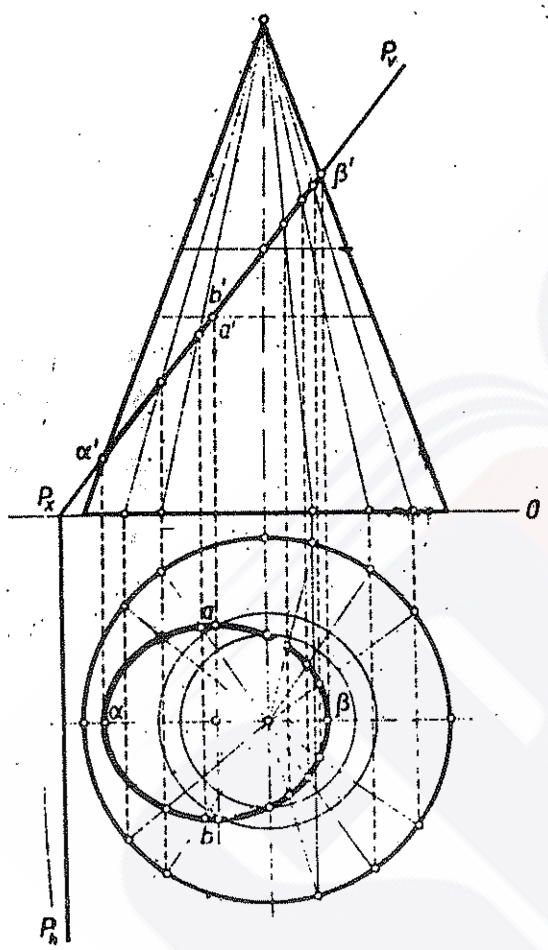
المساقط الأفقية (d) و (c) لهذه النقاط معروفة ، وباستخدام المستقيمات الأفقية نعين المساقط الأمامية (d') و (c') • بصورة مماثلة نعين نقاط تقاطع عدة مولدات اخرى مع المستوي • بوصل المساقط الأمامية لجميع النقاط المعينة على التتابع نجد المسقط الأمامي لخط التقاطع ( للقطع الناقص ) • القيمة الحقيقية للقطع الناقص يمكن تعيينها من المحاور الأساسية : المحور الكبير المساوي لطول القطعة $(\alpha\beta, \alpha_1\beta_1)$ والمحور الصغير المساوي لقطر الاسطوانة •




شكل رقم ( ٤٩٦ )

**مثال ٦** : حدد مساقط خط تقاطع المستوي P مع سطح المخروط ( الشكل ٤٩٧) •

**الحل** : يقطع المستوي P سطح المخروط وفق قطع ناقص ، مسقطه




شكل رقم ( ٤٩٧ )

الأمامي ينطبق على الأثر الأمامي ($P_V$) للمستوي ، أما مسقطه الأفقي فينشأ بطريقة النقاط . نأخذ المساقط الأمامية لمجموعة النقاط من خط التقاطع ونعين مساقطها الأفقية ( كما مر معنا في الأمثلة السابقة ) ثم نصل المساقط الأفقية لهذه النقاط بخط انسيابي ( قطع ناقص ) .

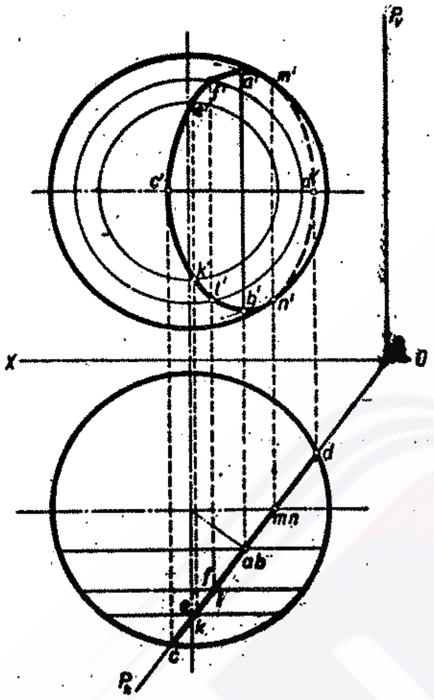
المسقط الأفقي لخط التقاطع كقطع ناقص يمكن أن يرسم بمساعدة المحاور الأساسية : المحور الكبير $\alpha\beta$ والمحور الصغير ab . القيمة الحقيقية للقطع الناقص تعين من محاوره الأساسية : المحور الكبير $\alpha'\beta'$ والمحور الصغير ab الذي نعينه من المسقط الأمامي (a'b') .

**مثال ٧ :** حدد خط تقاطع المستوي P مع سطح الكرة ، الشكل (٤٩٨) .

**الحل :** يقطع المستوي P سطح الكرة وفق دائرة مسقطها الأفقي (cd) ينطبق على الأثر الأفقي $P_h$ للمستوي ، ومسقطها الأمامي يشكل قطع ناقص يمكن انشاؤه بواسطة المحاور الأساسية : المحور الكبير هو المسقط

الأمامي (a'b') للقطر المتوضع عموديا على مستوي الاسقاط الأفقي ، والمحور الصغير هو المسقط الأمامي (c'd') للقطر المتوضع موازيا لمستوي الاسقاط الأفقي .

يمكن انشاء المسقط الأمامي للدائرة بطريقة النقاط : نأخذ المساقط الأفقية لمجموعة نقاط من الدائرة ونعين مساقطها الأمامية ، ثم نصل النقاط المعينة بخط مستمر ( قطع ناقص ) .



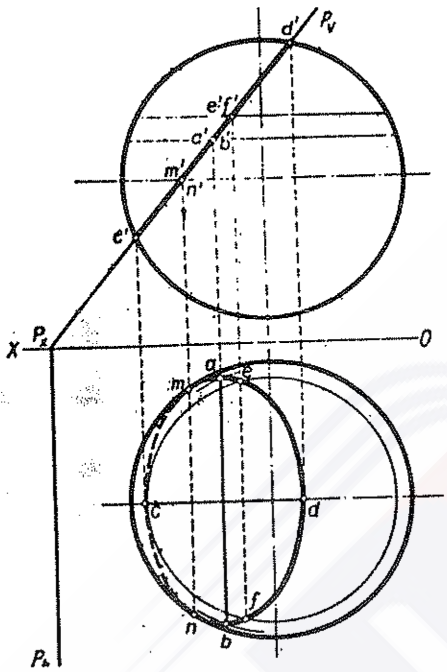
شكل رقم ( ٤٩٨ )

لفصل الجزء المرئي من المسقط الأمامي للمنحني عن جزئه اللامرئي نعين المساقط الأمامية (n') و (m') لنقاطه الواقعة على خط الطول الأساسي .

**مثال ٨** : أنشئ مساقط خط تقاطع المستوي P مع سطح الكرة ( الشكل ٤٩٩ ) .

**الحل** : يقطع المستوي P سطح الكرة وفق دائرة مسقطها الأمامي (c'd') ينطبق مع الأثر الأمامي ($P_V$) للمستوي ومسقطها الأفقي بشكل قطع ناقص يمكن انشاؤه بمساعدة المحاور الأساسية : المحور الكبير وهو المسقط الأفقي (ab) للقطر العمودي على مستوي الاسقاط الأمامي والمحور الصغير وهو المسقط الأفقي (cd) للقطر الموازي لمستوي الاسقاط الأمامي . يمكن انشاء المسقط الأفقي للدائرة بطريقة النقاط ، لهذا نأخذ المساقط الأمامية

لمجموعة نقاط من هذه الدائرة ونعين مساقطها الأفقية ، ثم نصل النقاط الحاصلة بخط مستمر ( قطع ناقص ) .




شكل رقم ( ٤٩٩ )

## تمارين تطبيقية على تقاطع منحنيات السطوح مع المستوي :

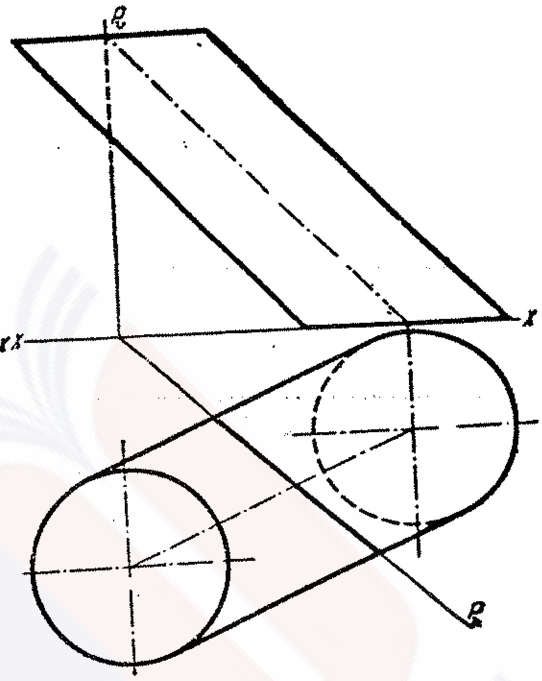
١ــ ارسم تقاطع السطح المنحني (الاسطوانة ، الهرم ) مع المستوي P في التعبير الاسقاطي الثنائي وحدد شكله الحقيقي ، الأشكال (٥٠٠ ــ ٥٠٣).

٢ــ استكمل في التعبير الاسقاطي الثلاثي مساقط السطح المنحني ( الاسطوانة ، الهرم ) وسطح تقاطعه مع المستويات التطابقية الأفقية والجانبية ، الأشكال ( ٥٠٤ و ٥٠٥ ) .

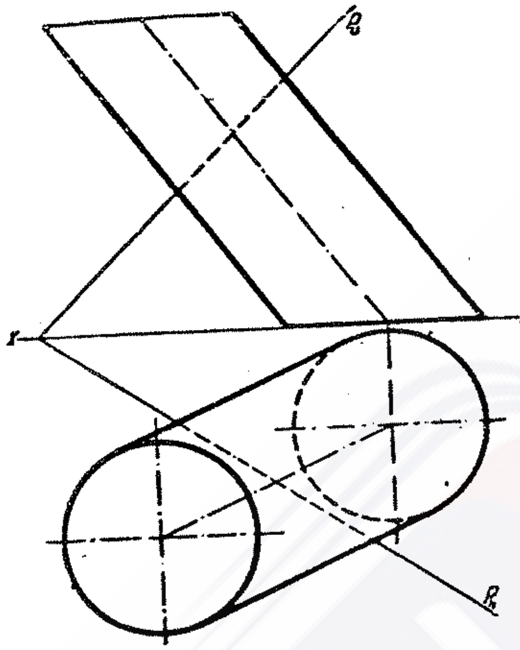
٣ــ ارسم في التعبير الاسقاطي الثنائي سطح تقاطع المخروط مع المستوي P في حالته العامة والذي يقطع المخروط تحت قمته ( الشكل ٥٠٦ ) .

٤ــ ارسم آثار المستوي P المماس للسطح المخروطي الموازي للمستقيم AB ( الشكل ٥٠٧ ) .

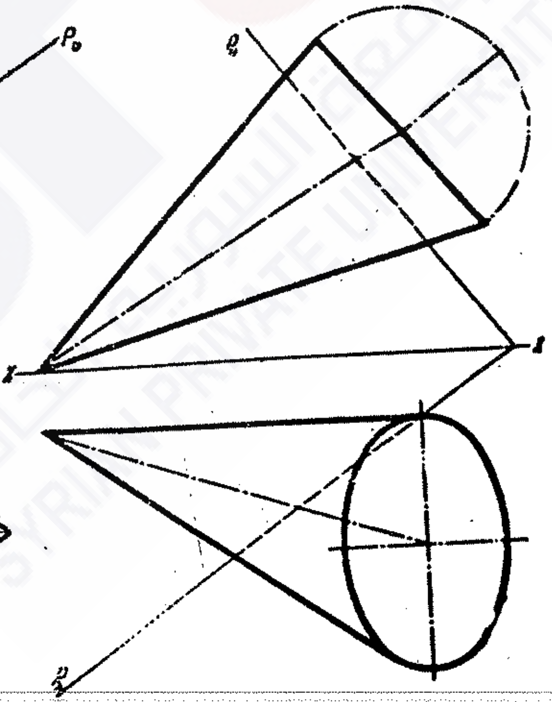
٥ــ مرر مستويا P مماسا للسطح الاسطواني بمستقيمه المولد AB ، الشكل (٥٠٨) .



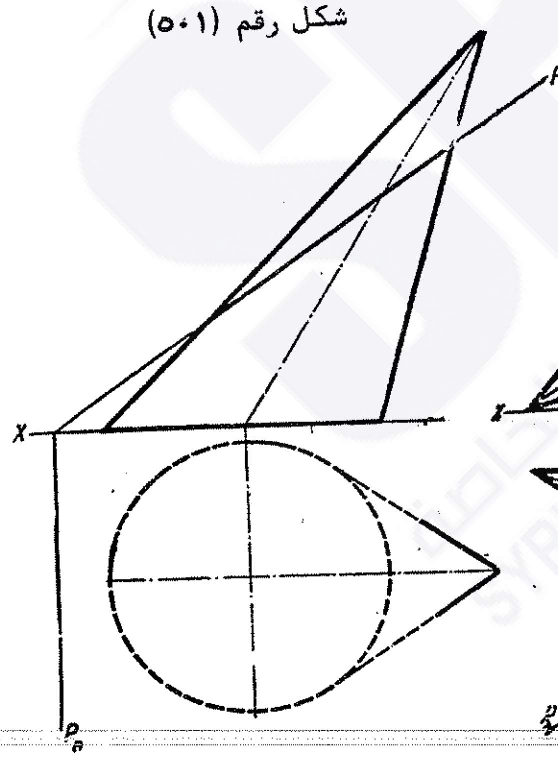
شكل رقم (٥٠٠)



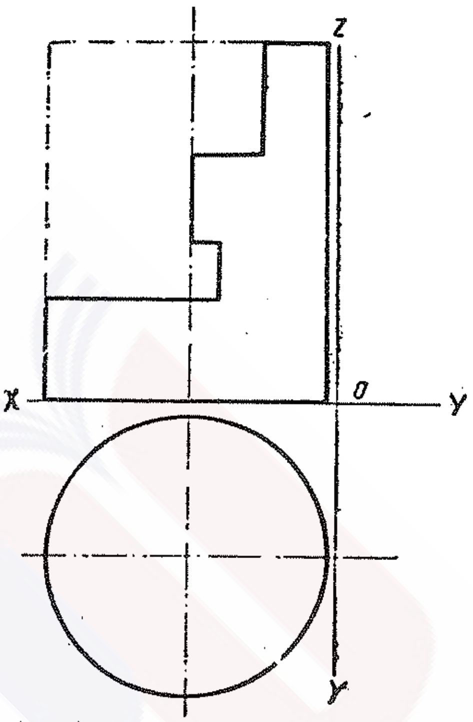
شكل رقم (٥٠١)



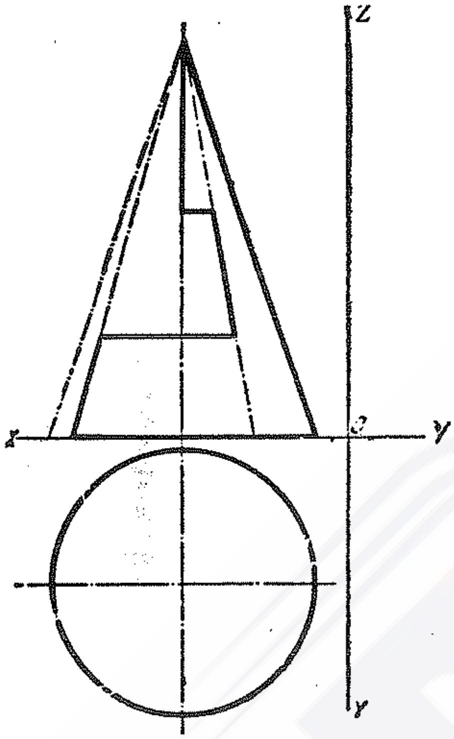
شكل رقم (٥٠٢)



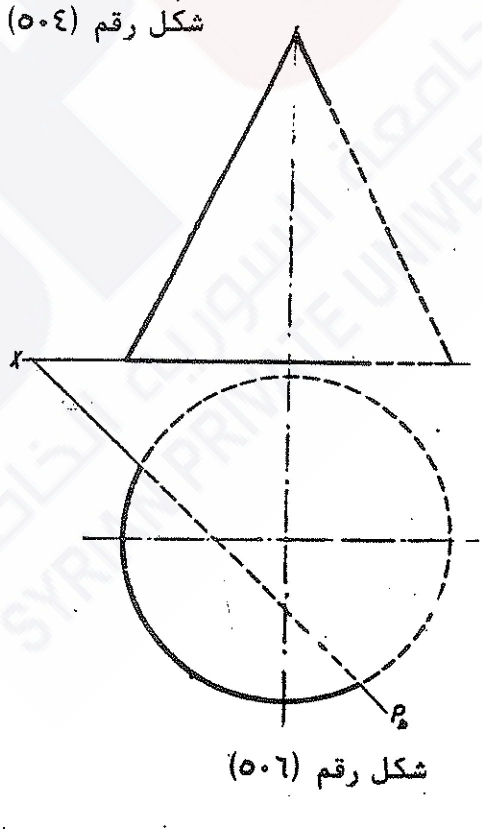
شكل رقم (٥٠٣)



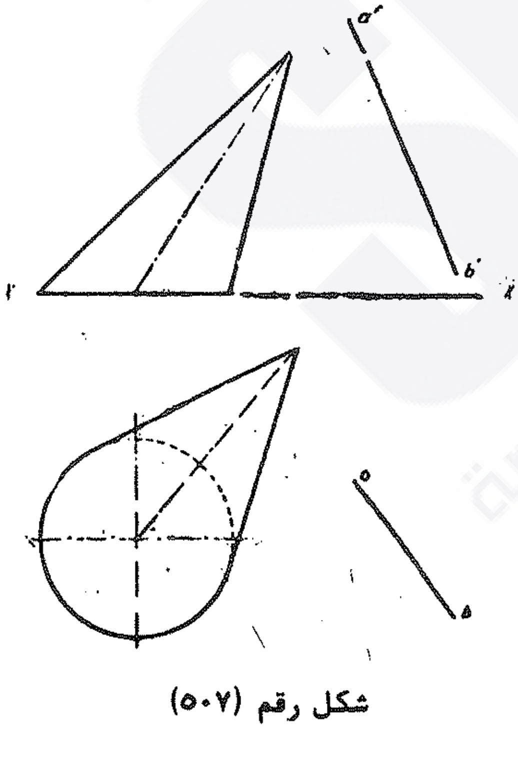

شكل رقم (٥٠٤)




شكل رقم (٥٠٥)

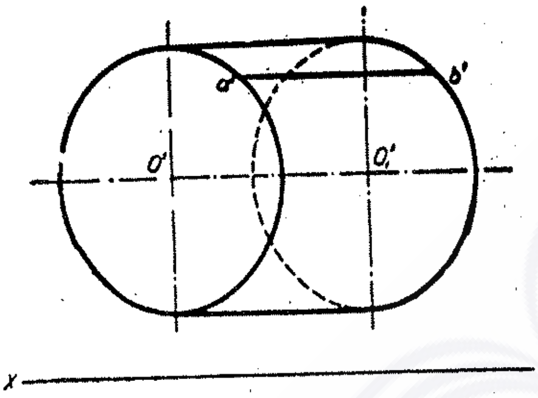



شكل رقم (٥٠٦)



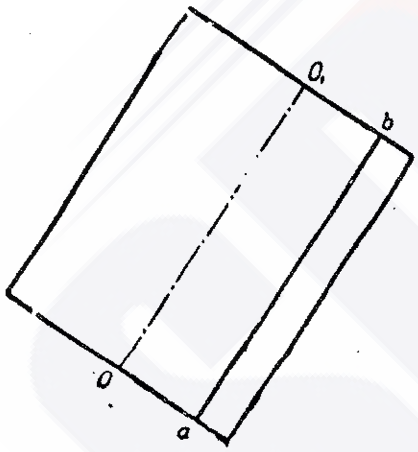

شكل رقم (٥٠٧)

٦ـ ارسم آثار المستوي P الدار من النقطة A والممـــاس لسطح المخروط ، الشكـــل ( ٥٠٩ و ٥١٠ ) .




٧ـ ارسم آثار المستوي P المماس لسطح المخروط الموازي لخط الأرض ، الشكل ( ٥١١ ) .

٨ـ ارسم آثار المستوي P المار من النقطة الخارجيـــة A والمماس لسطح الاسطوانـــة وجدد خط تماسهمـــا ، الشكل ( ٥١٢ ) .



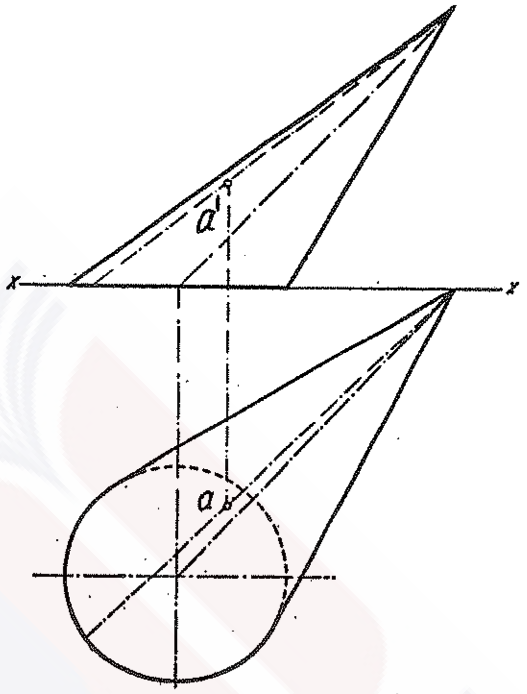

شكل رقم ( ٥٠٨ )

٩ـ ارسم آثار المستوي P المار من النقطة A الواقعة علـى خط الأرض والمماس لسطـــح المخروط ، الشكلين ( ٥١٣ و ٥١٤ ) .

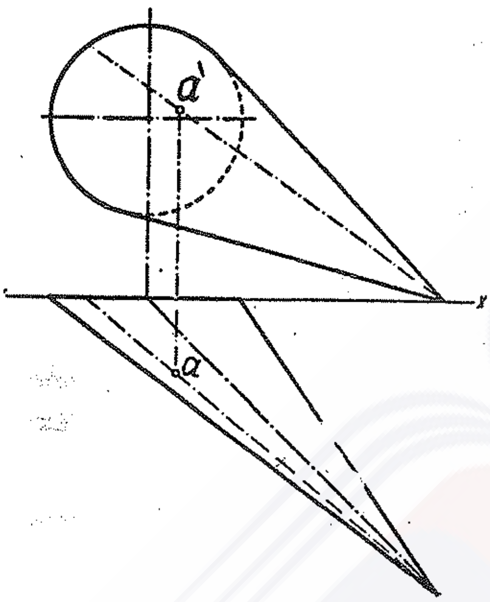
## ثالثا ـ تقاطع مستقيم مع منحنيات السطوح :

**مقدمة:** لتعيين نقطة تقاطع مستقيم مع سطح جسم ما ( موشور ، هـــرم ، اسطوانة ، مخروط ، كرة ، ... الخ ) نلجأ الى طـ  مماثلة كمـــا في تعيين نقطة تقاطع مستقيم مع مستو ، أي :

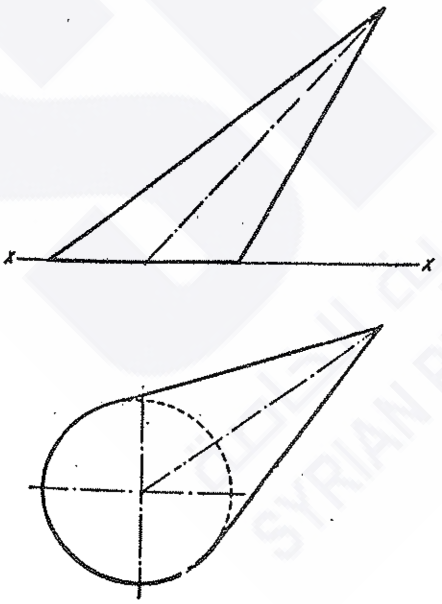
١ـ نضم المستقيم المفروض في مستو مساعد .



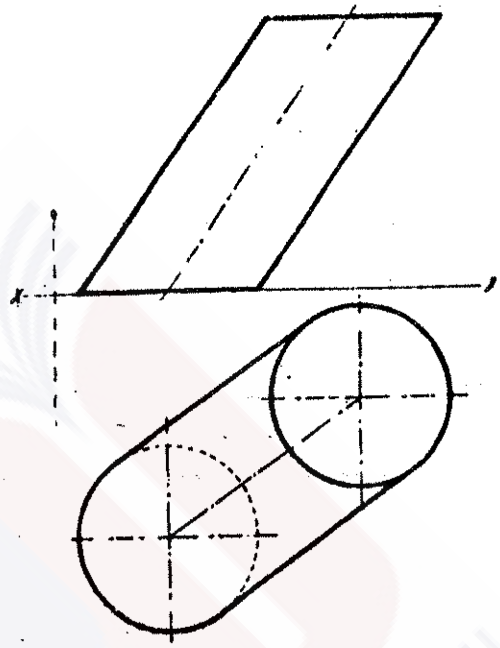

شكل رقم (٥٠٩)



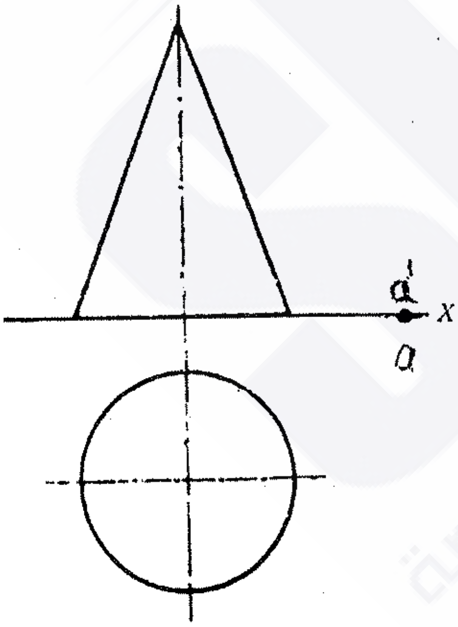

شكل رقم (٥١٠)



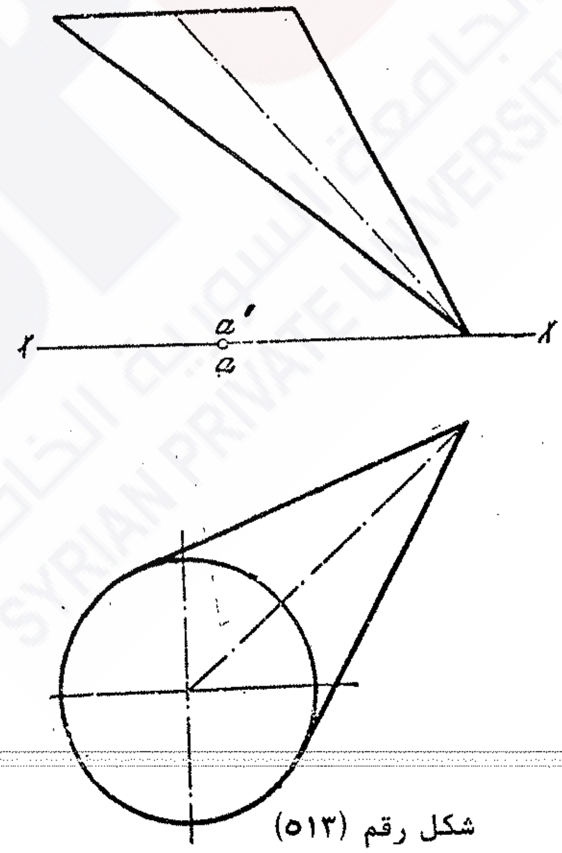

شكل رقم (٥١١)




شكل رقم (٥١٢)




شكل رقم (٥١٤)




شكل رقم (٥١٣)

٢ـ نعين خط ( مستقيم أو خط منحني ) تقاطع السطح المفروض مع المستوي المساعد ٠

٣ـ في مكان تقاطع المستقيم المفروض مع خط التقاطع نجد النقاط المنشودة ٠

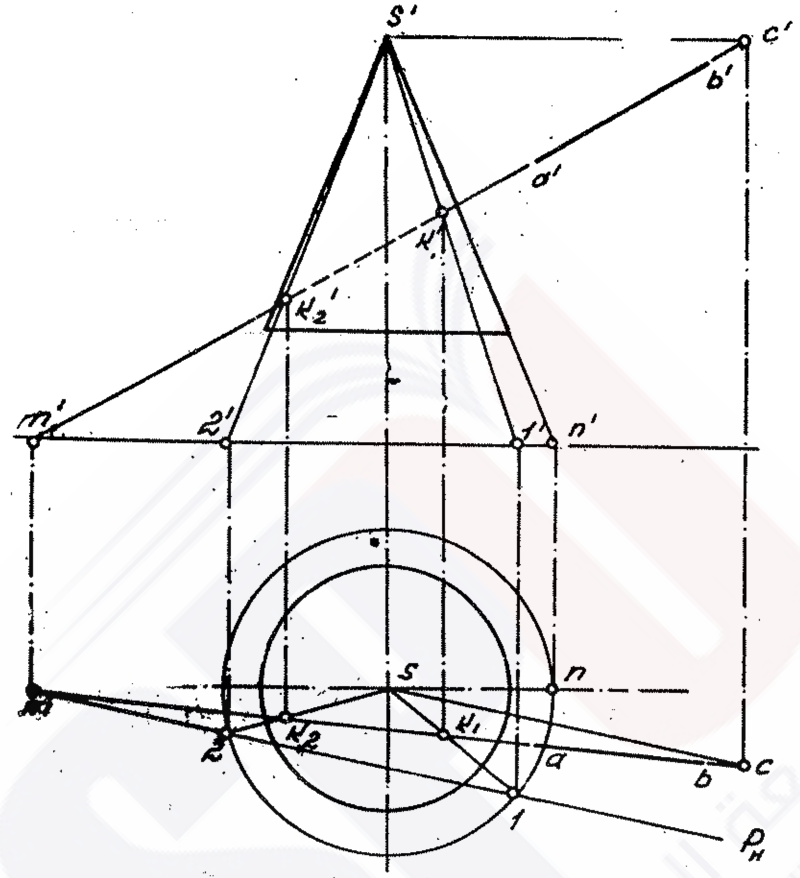
في الحالة الخاصة يمكن أن يكون المستقيم مماسا للسطح ٠

* ملاحظة : عند ضم المستقيم في مستو مساعد يختار هذا المستوي بحيث تكون مساقط خط تقاطعه مع السطح على مستويات الاسقاط بشكل خطوط بسيطة ـ مستقيم أو دائرة ٠

## آ ـ أمثلة تطبيقية :

مثال ١ : أوجد نقطتي تقاطع المستقيم AB مع المخروط S المبين في الشكل ( ٥١٥ ) ٠

الحل : نأخذ مستويا مساعدا P يمر من المستقيم AB ومن الرأس S ولرسم الأثر الأفقي لهذا المستوي نعين النقطة M الأثر الأفقي للمستقيم AB٠ ثم من النقطة S نرسم مستقيما أفقيا واقعا في المستوي المساعد P فيكون مسقطه الجبهي s'e' موازيا لخط الأرض ٠ نرسم من النقطة m الأثر الأفقي $P_h$ موازيا للمسقط الأفقي للمستقيم SC ٠ نحدد سطح تقاطع المخروط فيكون أثره الأفقي دائرة مركزها S ونصف قطرها sn فتتقاطع هذه الدائرة مع الأثر $P_H$ بالنقطتين 1,2 ٠ نرسم مولدي المخروط $s_1$ و $s_2$ فنحصل على مولدين واقعين في المستوي المساعد P وتكون نقطتا تقاطع هذين المولدين مع المستقيم AB هما النقطتان المطلوبتان $k_1$ و $k_2$ ٠

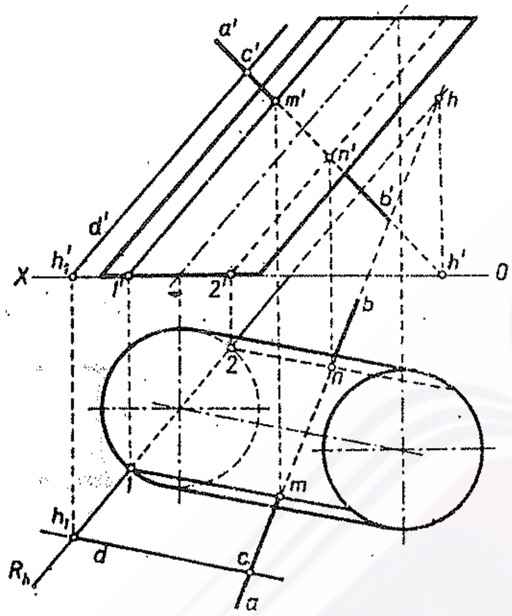



شكل رقم ( ٥١٥ )

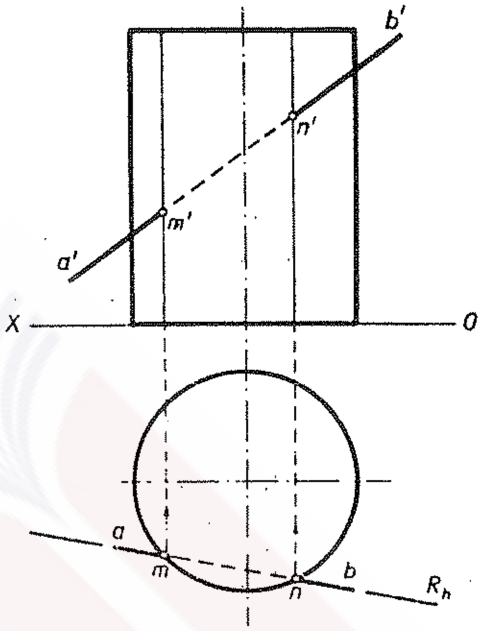
**مثـــال ٢** : أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح الاسطوانة،الشكل(٥١٦)٠

**الحـــل** : نضم المستقيم AB في مستو اسقاطي أفقي R فيقطع سطح الاسطوانـــة وفق مولدين ٠ مكان تقاطع المساقط الأمامية لهذين المولدين والمستقيـــم المفروض نجد المساقط الأماميـة ('n) و ('m) للنقاط المطلوبة ٠ بمعرفـة النقاط 'n و 'm نعين n و m على المستقيم ab ٠

**مثـــال ٣** : أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح الاسطوانة المائلـــة ، الشكل ( ٥١٧ ) ٠




شكل رقم ( ٥١٧ )

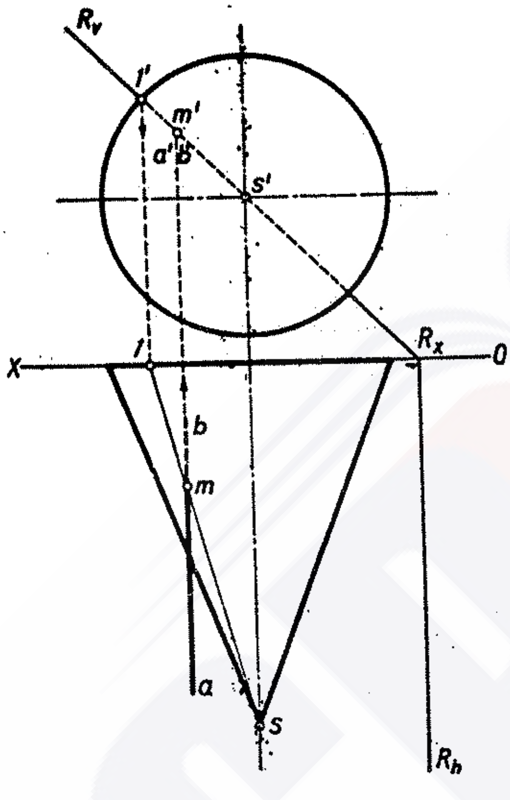



شكل رقم ( ٥١٦ )

<u>الحــل</u> : نضم المستقيم AB في المستوي R الموازي لمحور الاسطوانة ٠٠

لهذا نأخذ على المستقيم (ab,a'b') نقطة كيفية (c,c') ونرسم منهـا المستقيم (cd,c'd') الموازي لمحور الاسطوانة ٠ لهذا المستوي المعين بمستقيمين متقاطعين يقطع سطح الاسطوانة بمولدين ٠ نعين الآثار الأفقية $(h_1,h_1')$ و (h,h') للمستقيمين (cd,c'd') و (ab,a'b') ونرسم من النقطتين $h_1$ و h الأثر الأفقي $(R_h)$ للمستوي ٠ المستوي R يقطع قاعدة الاسطوانة وفق الوتر (12,1'2') ٠ من النقطتين (2,2') و (1,1') نرسم مولـدات الاسطوانة ٠ مكان تقاطع المساقط الأمامية لهذه المولدات مع المسقط الأمامي (a'b') للمستقيم المفروض نجد ا' مساقط الأمامية (n') و (m') للنقاط المطلوبة ٠ بمعرفة النقطتين n' و m' نجد النقطتين n و m على المستقيم ab ٠

**مثـــال ٤** : أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح المخروط، شكل (٥١٨) .



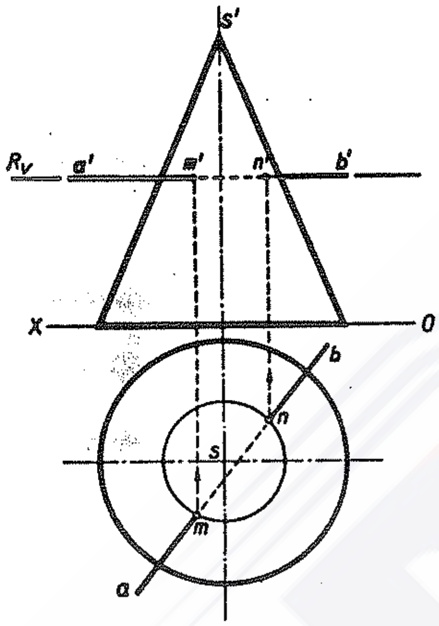
شكل رقم (٥١٨)

**الحـــل** : يقطع المستقيم المفروض البسطح الجانبي للمخروط في نقطــة وحيدة (m,m') . نضم المستقيم AB في مستو اسقاطي أمامي R مار من قمـة المخروط S فيقطع هذا المستـوي سطح المخروط وفق مستقمين مولدين ( على الرسم نبين مولدا واحـدا ). مكان تقاطع المساقط الأفقيـــة للمستقيمات الحاصلة والمستقيـم المفروض نجد المسقط الأفقـي ( m ) للنقطة المنشودة . بمعرفة هـــذه النقطة m نعين النقطة m' الواقعة على المسقـــط الأمـــــامي (a'b') للمستقيم المفروض .

**مثـــال ٥** : أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح المخروط ، الشكـــل ( ٥١٩ ) .

**الحـــل** : نضم المستقيم AB في المستوي R الموازي للمستوي H فيقطع سطح المخروط وفق دائرة . مكان تقاطع المساقط الأفقية للدائرة والمستقيم المفروض نجد المساقط الأفقية ( n ) و ( m ) للنقاط المنشودة . بمعرفة n و m نجد النقطتين n' و m' على المستقيم a'b' . يمكن أن نضـــم

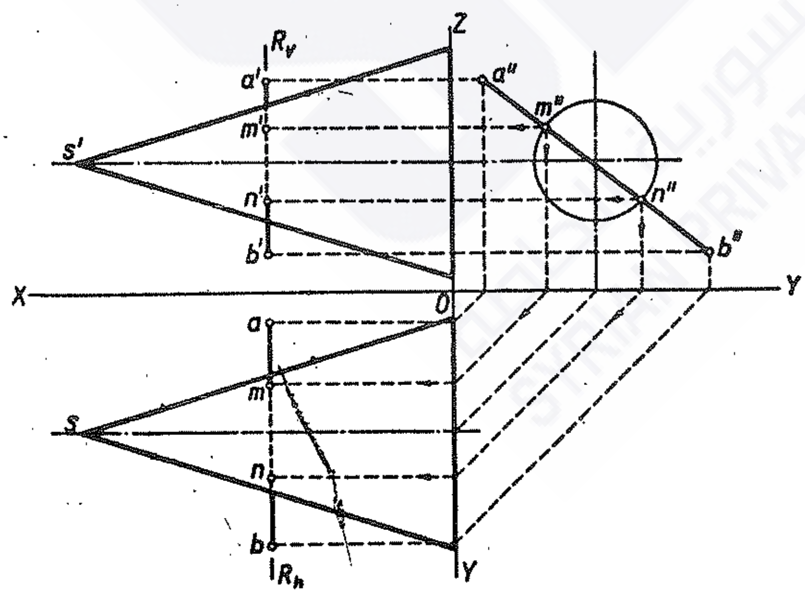
المستقيم AB في مستوي أسقـــــاطي أفقي الا أن هذا يعقد المسألة ٠



شكل رقم ( ٥١٩ )

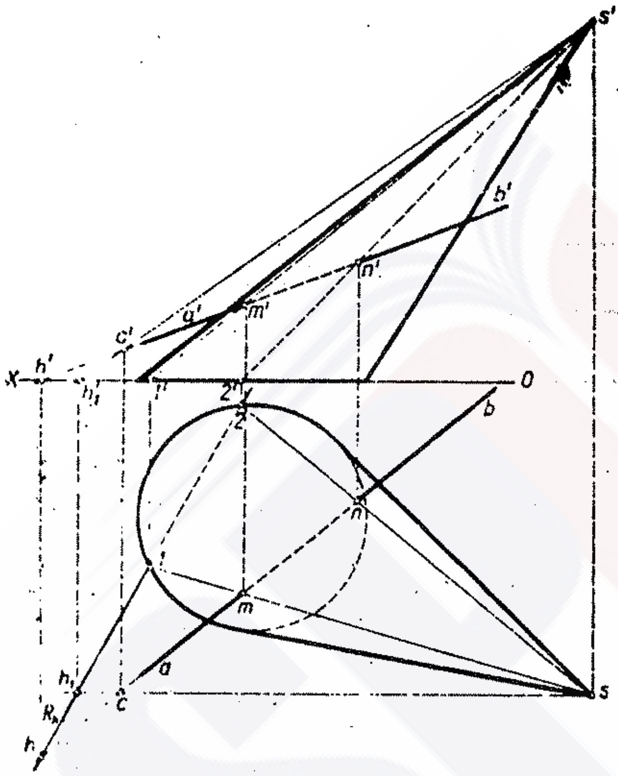
**مثـــال ٦** : أوجد نقاط تقاطـــــع المستقيم AB مع سطح المخـــروط ، الشكل ( ٥٢٠ ) ٠

**الحـــل** : نضم المستقيم AB فـــي مستو جانبي R فيقطع سطح المخروط وفق دائرة ٠ مكان تقاطع المساقـــط الجانبية للدائرة الناتجة والمستقيـــم المفروض نجد المساقط الجانبية ("m") و ("n") للنقاط المطلوبة وبمعرفتها نجد مساقطها الأفقية والأمـامية عـلى مساقط المستقيم (ab,a'b') الموافقة ٠



شكل رقم ( ٥٢٠ )

**مثـــال ٧ :** أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح المخروط المائـــل ، شكل ( ٥٢١ )

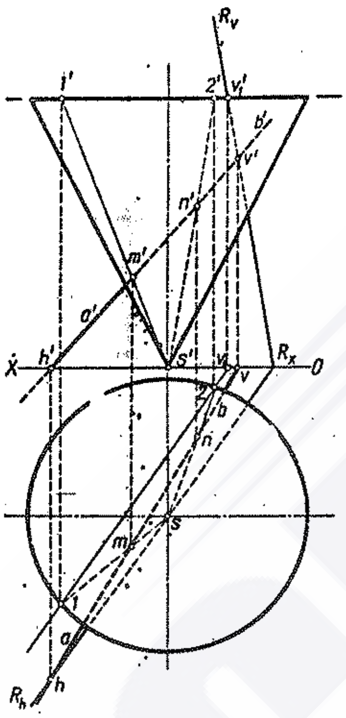



شكل رقم ( ٥٢١ )

**الحـــل :** نضم المستقيم AB في المستوي R المار من قمة المخروط • هذا المستـــوي ( المستقيم المفروض والنقطة S قمة المخروط ) يقطـــع سطح المخروط وفق مستقيمين مولدين • لتعيين هذيـــن المولدين نقوم بمايلـــي : نعين المستوي المفـــروض بالمستقيم AB والنقطـــة S بمستقيمين متقاطعيـــن CS و AB ( النقطة C اختيارية على المستقيم AB ) • نعين الآثار الأفقية ( $(h_1,h_1')$ و $(h,h')$ للمستقيمات $(ab,a'b')$ و $(cs,c's')$ ونمرر من النقطتين $h_1$ و h الأثر الأفقي ($R_h$) للمستوي • يقطع المستوي R قاعدة المخروط وفق الوتر (12,1'2') كمـــا يقطع سطح المخروط وفق المستقيمين المولدين (S2,S'2') و (S1,S'1') • مكان تقاطع المساقط الأمامية لهذه المولدات مع المسقط الأمـامي (a'b') للمستقيم المفروض نجد المساقط الأمـامية (n') و (m') للنقاط المنشودة وبمعرفتها نجد النقطتين n و m على المستقيم ab •

**مثـــال ٨** : أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح المخروط،الشكل(٥٢٢)٠

**الحـــل** : نضم المستقيم AB في المستوي R المار من قمة المخروط S . نعين آثـــار المستقيم (ab,a'b') (h,h') و (v,v') ونرسم آثار المستوي : الأفقي $R_h$ ٠ مـــن النقطتين s و h والأمامي $R_v$ مـــن النقطتين v' و $R_x$ ٠ نعين خط تقاطـــع المستوي R مع مستوي قاعدة المخـــروط ٠ المستوي R يقطع قاعدة المخروط وفـــق الوتر (12,1'2') وسطحه وفق المولـــدات (S1,S'1') و (S2,S'2') ٠ مكان تقاطـــع المساقط الأماميـــة لهذه المولدات والمسقط الأمامـــي (a'b') للمستقيم المفروض ٠ نجد المساقط الأمـــامية (n' و m') للنقـــاط المنشودة ٠ بمعرفة (m',n') نـعين النقطتين n و m على المستقيم ab ٠




شكل رقم ( ٥٢٢ )

**مثـــال ٩** : أوجد نقاط تقاطع المستقيم AB مع سطح الكرة،الشكل (٥٢٣ ) ٠

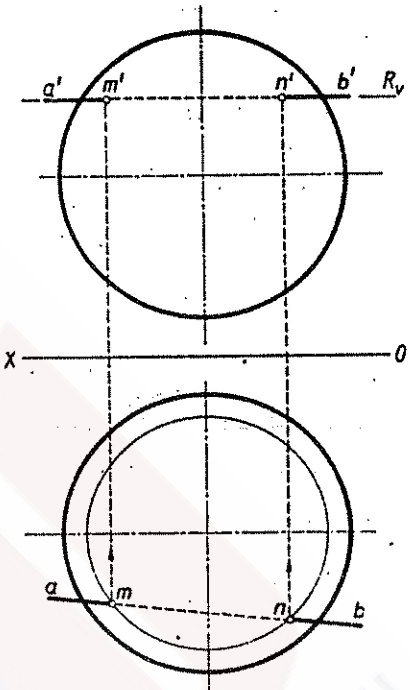
**الحـــل** : نضم المستقيم AB في المستوي R الموازي للمستوي H فيقطع سطح الكرة وفق دائرة ٠ مكان تقاطع المساقط الأفقية للدائرة الحاصلـــة والمستقيم المفروض ٠ نجد المساقط الأفقية ( n ) و ( m ) للنقاط المطلوبة، وبمعرفتها نجد النقطتين (m',n') على المستقيم (a'b') ٠

## ب ـ تمارين تطبيقيــــة :

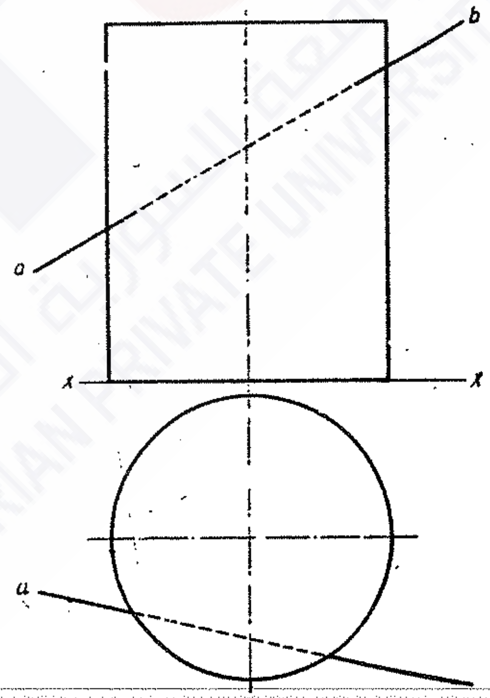
١ـ حدد في التعبير الاسقاطي الثنـــائي نقاط تقاطع المستقيم AB للســطح الاسطواني ، الأشكال (٥٢٤ ـ ٥٢٦).

٢ـ هل يتقاطع المستقيم AB مــــع المخروط ( الشكل ٥٢٧ ) ؟ واذا لم يكن متقاطعا فأنقله بحيث يتقاطـع مع المخروط المعني .

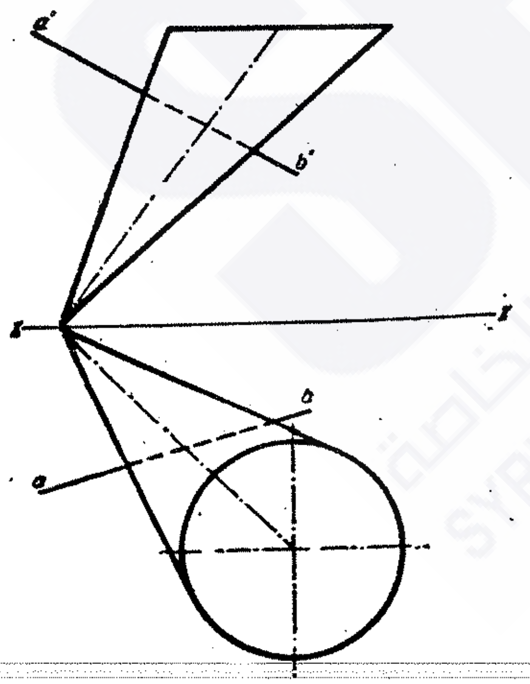
٣ـ أوجد نقاط تقاطع المستقيم مـــع منحني السطوح ( الاسطوانــــة أو المخروط ( الأشكال ٥٢٨ ـ ٥٣٤ ) .



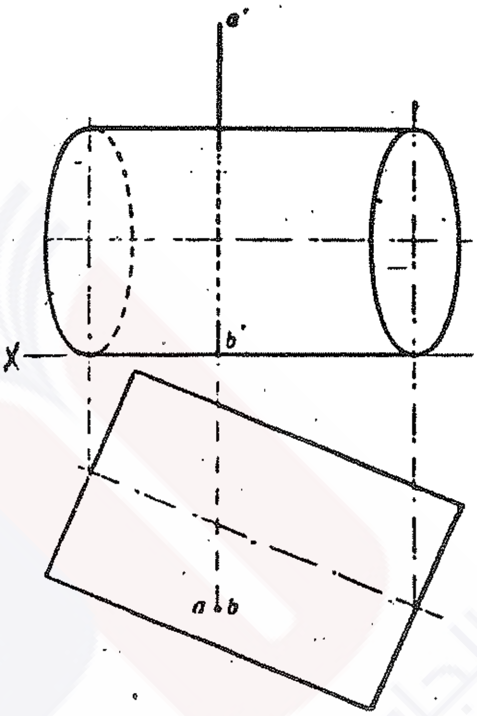

شكل رقم ( ٥٢٣ )



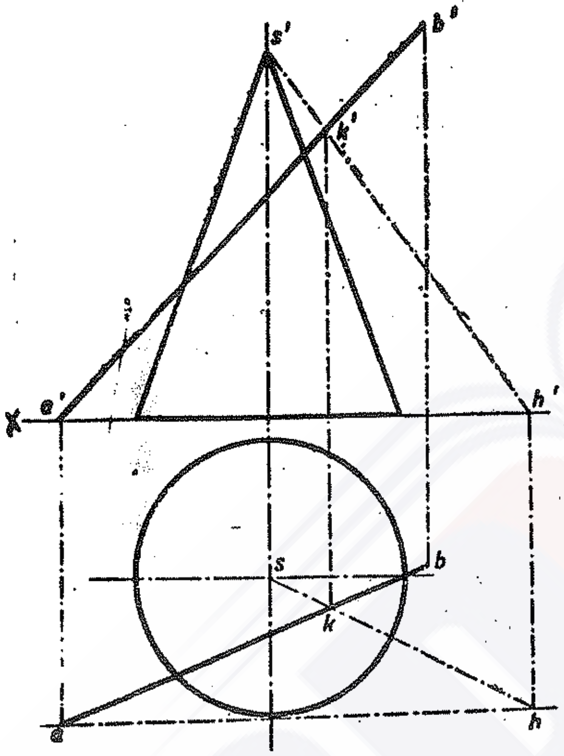

شكل رقم ( ٥٢٤ )



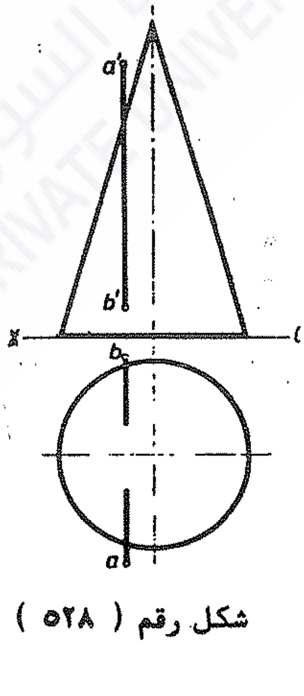

شكل رقم ( ٥٢٥ )



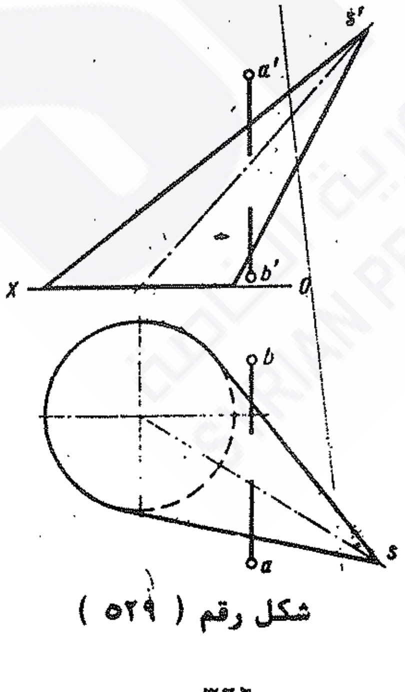

شكل رقم ( ٥٢٦ )



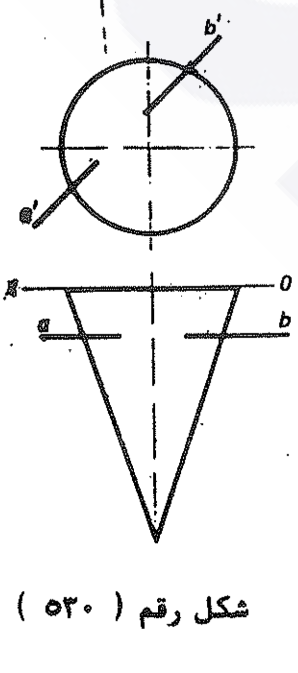

شكل رقم ( ٥٢٧ )



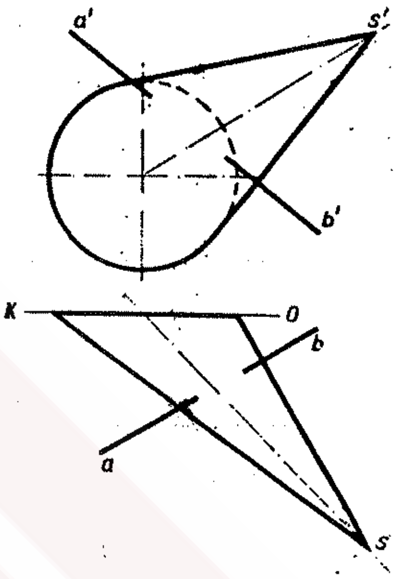

شكل رقم ( ٥٢٨ )



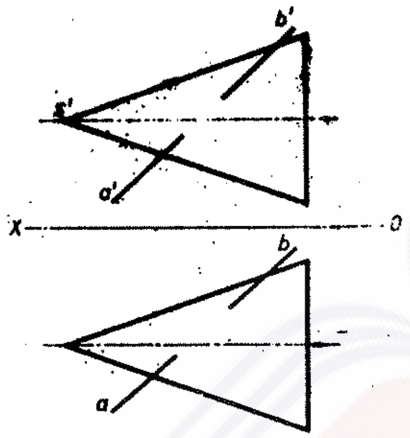

شكل رقم ( ٥٢٩ )



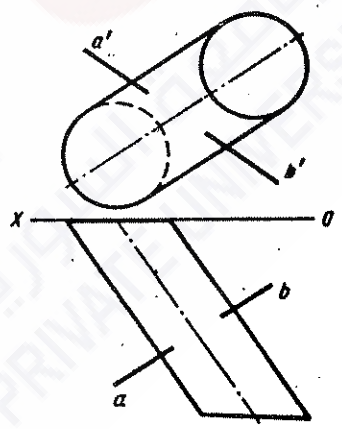

شكل رقم ( ٥٣٠ )



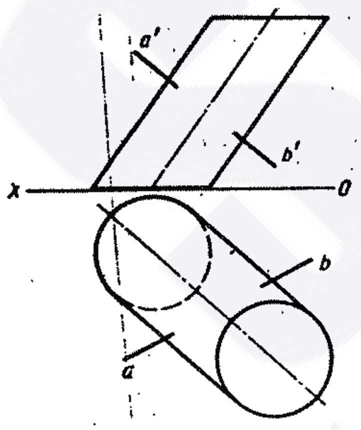

شكل رقم ( ٥٣١ )




شكل رقم ( ٥٣٢ )




شكل رقم ( ٥٣٣ )




شكل رقم ( ٥٣٤ )

٤ـ حدد في التعبير الاسقاطي الثنائي نقطة على سطح منحيات السطـــوح تكون الأقرب للنقطة المعلومة A ( الشكلان ٥٣٥ و ٥٣٦ ) .

# الفصل التاسع

## تقاطع الأجسام

### أولا ـ تقاطع منحنيات السطوح :

**مقدمة** : لانشاء خط تقاطع سطحين يجب أن نعين نقاط تنتمي لكل من السطحين بآن واحد ثم نصل بين النقاط بتسلسل معين ٠ ويمكن أن يكون خط التقاطع :

١ـ منحي فراغيا ، في حالة تقاطع سطحين منحنيين أو سطح منحني مع متعدد سطوح ٠

٢ـ خطا منكسراً فراغيا ، في حالة تقاطع متعددات السطوح ٠

أحيانا خط تقاطع سطحين يمكن أن يكون مستويا ـ خط مستقيم ، دائرة ، قطع ناقص ، ٠٠٠ الخ ٠

لتعيين نقطة كيفية من خط التقاطع نقوم بالتالي :

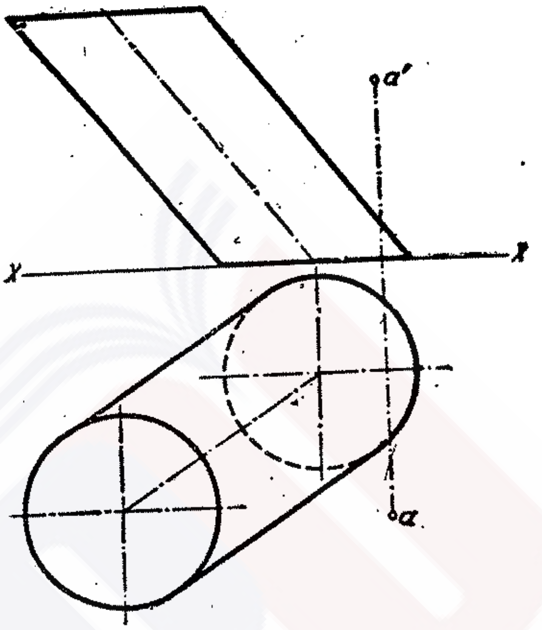
١ـ تستخدم مستويا مساعدا ٠

٢ـ نعين خط التقاطع هذا المستوي مع كل من السطحين ٠

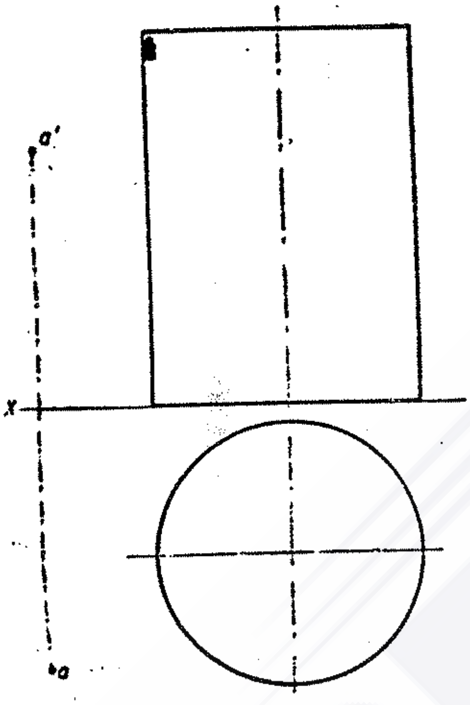
٣ـ مكان تقاطع الخطين الحاصلين يعين لنا النقاط المطلوبة ٠

وبالتدريج ، باستعمال مجموعة مستويات مساعدة يمكننا تعيين العدد الكافي من النقاط ٠

* **ملاحظة** : علينا اختيار المستوي المساعد بحيث تكون مساقط خط تقاطعه مع كل من السطحين على مستويات الاسقاط بشكل خطوط بسيطة ـ




شكل رقم ( ٥٣٥ )




شكل رقم ( ٥٣٦ )

مستقيم أو دائرة ٠

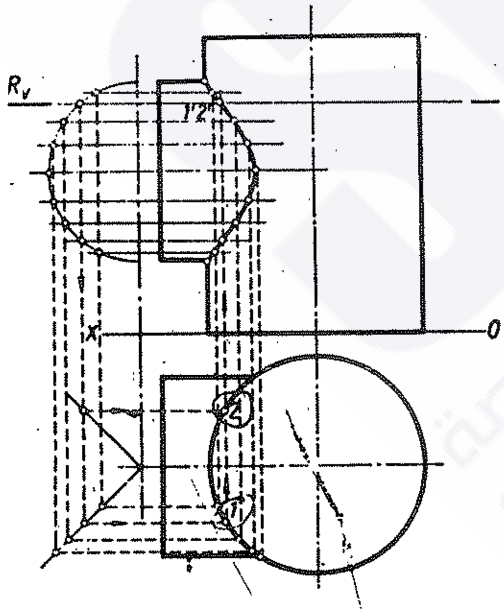
* **ملاحظات أخرى** : اذا كان أحد السطحين المتقاطعين ذا مولدات مستقيمة فان خط التقاطع يمكن تعيينه برسم مجموعة مولدات على هذا السطح وبتعيين نقاط تقاطعها مع السطح الآخر نصل هذه النقاط بخط منحني ٠ أحيانا لتعيين نقاط تقاطع سطحين منحنيين من الأسهل استخدام لامستوي بل سطح اسطواني أو مخروطي أو كروي ٠

ان أي سطح دوراني يقطع كرة وفق دائرة اذا كان مركز الكرة يقع على محور الدوران ٠

## آ ـ أمثلة تطبيقية :

**مثال ١** : أوجد خط تقاطع الاسطوانتين ، شكل ( ٥٣٧ ) ٠

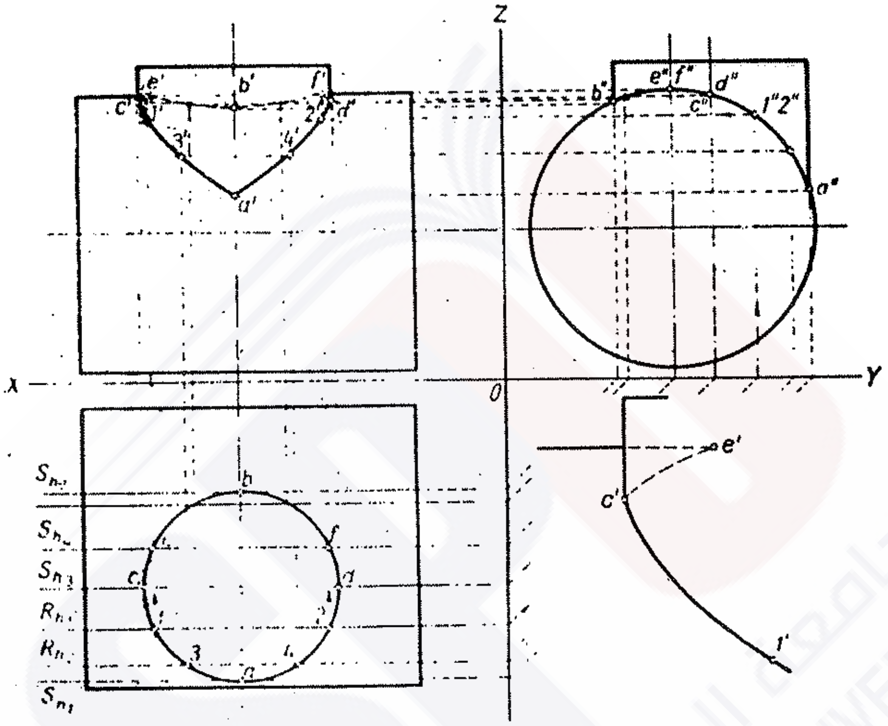
**الحل** : نستخدم مستويا مساعدا R موازيا للمستوي H فيقطع سطح الاسطوانة الشاقولية وفق دائرة ، أما سطح الاسطوانة الأفقية وفق مولدات ٠ مكان تقاطع هذه الخطوط نجد النقطتين (2,2') و (1,1') ٠ بصورة مماثلة نجد مجموعة النقاط الأخرى ٠ بوصل هذه النقاط بخط مستمر نحصل على خط التقاطع المطلوب ٠




شكل رقم (٥٣٧)

* **ملاحظـــة** : يمكننا استخدام مستوي مساعد مواز للمستوي V .

**مثـــال ٢ : أوجد خط تقاطع الاسطوانتين ، الشكل ( ٥٣٨ ) .**



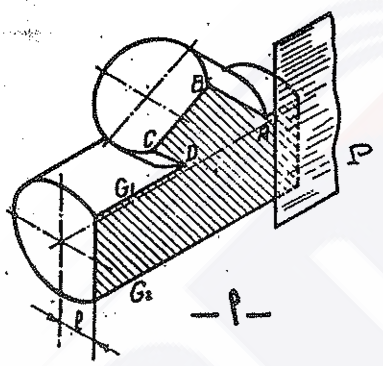

شكل رقم ( ٥٣٨ )

**الحـــل** : نستخدم مستويا مساعدا R موازيا للمستوي V فيقطع سطـــح الاسطوانتين وفق المولدات . مكان تقاطع هذه المولدات نجد النقطتيـــن (2,2') و ( 1,1' ) . بصورة مماثلة نجد مجموعة النقاط الأخرى ثم نعيـــن النقاط المميزة $s_1, s_2, s_3, 2_4$ بواسطة المستويات المساعدة $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ ( انظر الرسم ) بوصل جميع النقاط الحاصلة بخط منحن نحصل على خـــط التقاطع المطلوب .

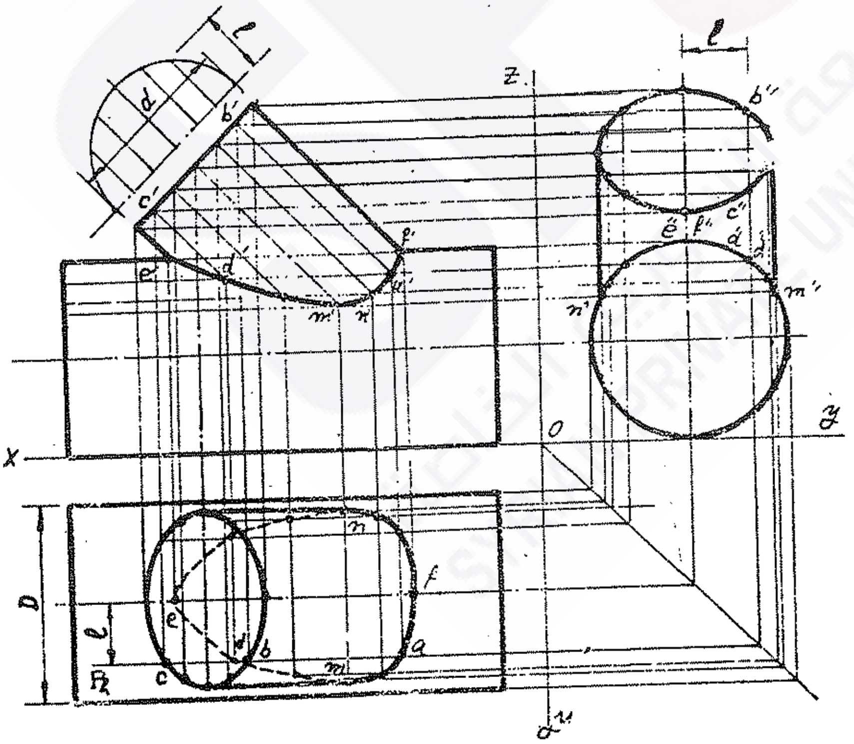
* **ملاحظـــة** : عند انشاء خط التقاطع علينا أن نوجه انتباهنا لتعييـــــن النقاط المميزة لهذا الخط ٠

**مثـــال ٣** : أنشئ منحني تقاطع الاسطوانتين المبينتين في الشكل (٥٣٩) ٠

**الحـــل** : نقطع هاتين الاسطوانتين بالمستوي الجبهي P الشكل ( ٥٣٩ آ ) فيقطع الاسطوانة ذات المحور الموازي لخط الأرض بالمولديـــــن $G_2$ و $G_1$ ويقطع الاسطوانة المائلة بالمولدين CD و AB ٠ ويتقاطع المولد $G_1$ مع هذين المولدين بالنقطتين A,D على الترتيب ٠ ثم نعين ذلك على




شكل رقم ( ٥٣٩ آ )



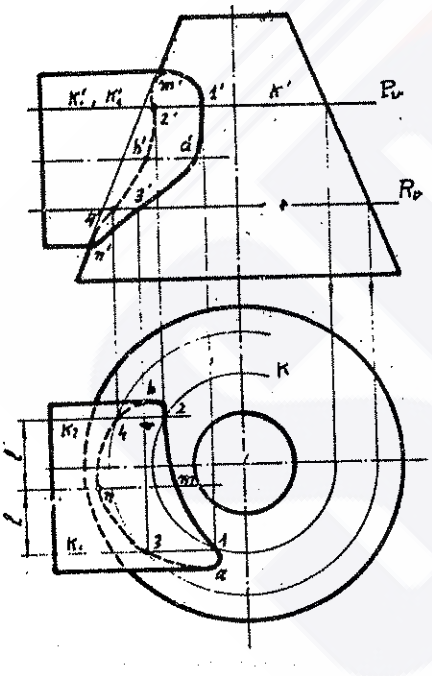

شكل رقم ( ٥٣٩ ب )

المخطط كما هو مبين على الرسم ونعين عدة نقاط عادية من منحني التقاطع ونقاطه الخاصة N و M و F و E ثم نرسم مساقطه .

* **ملاحظة** : لايفضل استعمال المستويات المساعدة الأفقية في الحل لأنها تقطع الاسطوانة المائلة بقطوع ناقصة وهذا مما يعقد الحل .

**مثال ٤** : ارسم منحني تقاطع الاسطوانة والمخروط ، الشكل ( ٥٤٠ ) .

**الحل** : نقطع السطحين بمستويات أفقية مثل R و P ، ... الخ فيقطع كل منها المخروط بمتوازيه والمخروط بمولدين موازيين لخط الأرض ، وتتقاطع هذه المتوازية مع المولدين بنقطتين من منحني التقاطع ، وبذلك نحصل على عدة نقاط من منحني التقاطع فنرسم مساقطه كما هو مبين بالشكل .

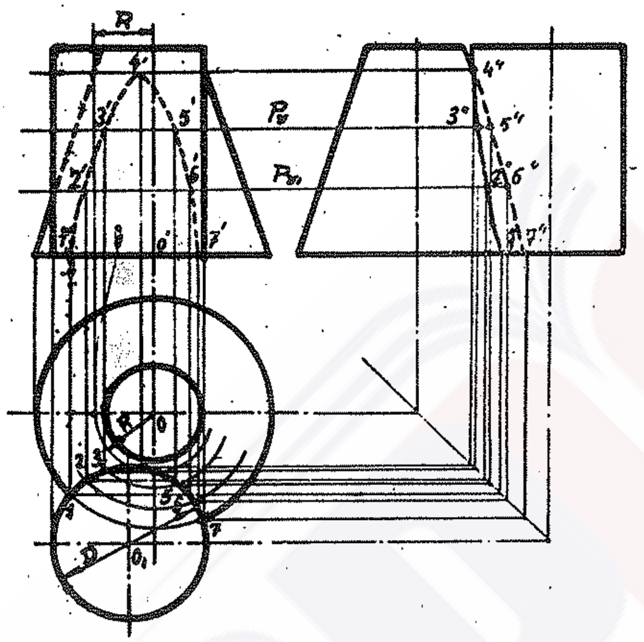



شكل رقم ( ٥٤٠ )

**مثال ٥** : أنشئ منحني تقاطع اسطوانة مع مخروط محوراهما شاقوليان ، شكل ( ٥٤١ ) .

**الحل** : نقطع سطحي الاسطوانة والمخروط بالمستوي المساعد الأفقي P فيقطع كلا منهما بمتوازيه ، وتتقاطع هاتان المتوازيتان بالنقطتين ( 5,5' ) و ( 3,3' ) . عندما يمر المستوي المساعد من قاعدتي الجسمين المفروضين نحصل على النقطتين (7,7') و (1,1') . وأما النقطة (4,4') فهي أقرب نقاط

منحني التقاطع من محور المخروط وهي تقع في المستوي Q المار من محوري السطحين ومسقطها الأفقي 4 يقع على $\bar{Q}_h$ وعلى المسقط الأفقي لقاعدة الاسطوانة ونعين مسقطها الجبهي '4 بواسطة مولد أو متوازية من المخروط ، وأخيرا نصل بين جميع النقاط



شكل رقم ( ٥٤١ )

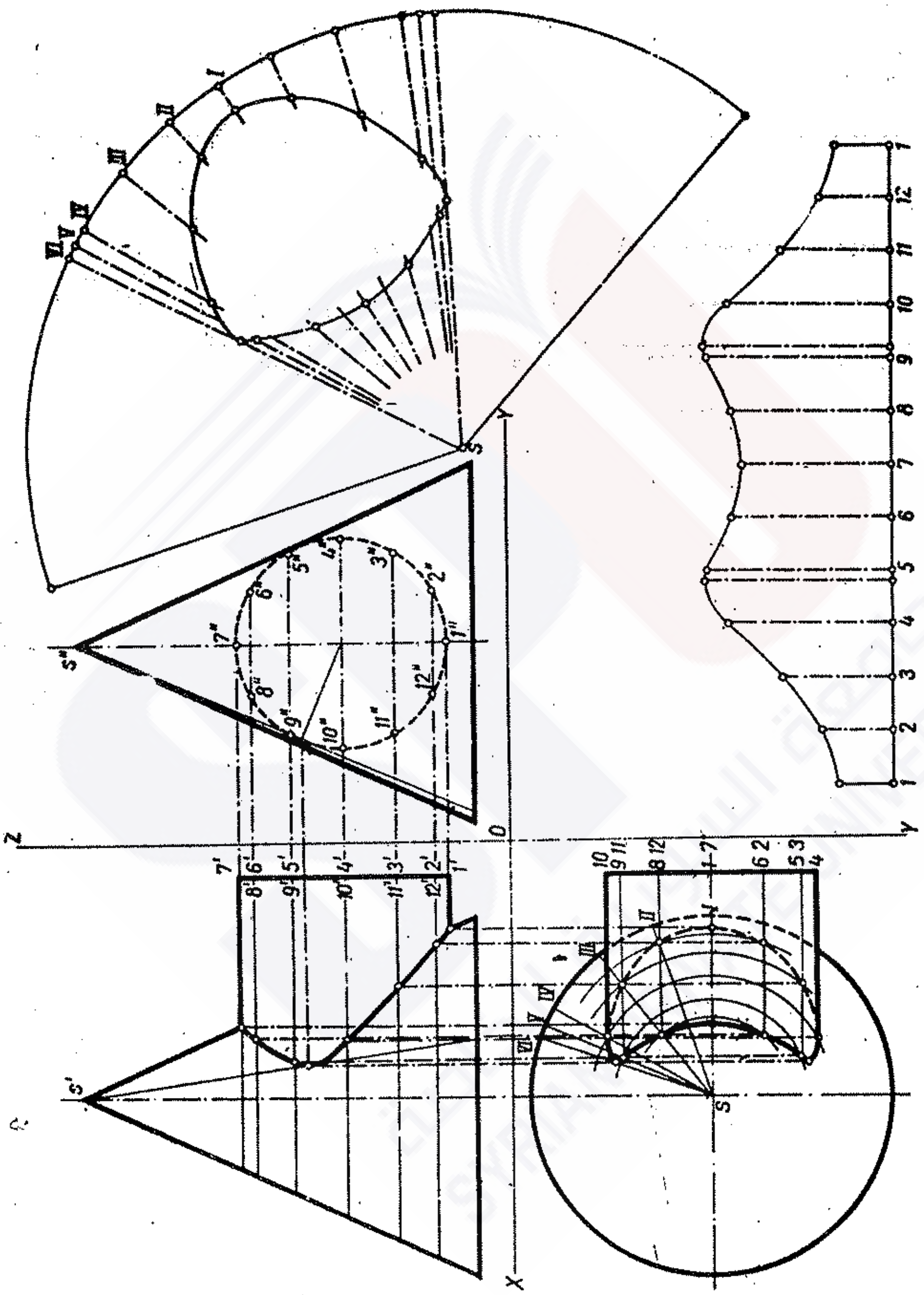
الناتجة كما هو مبين بالرسم فنحصل على منحني التقاطع المطلوب ٠

**مثال ٦** : أوجد خط تقاطع الاسطوانة مع المخروط وأرسم نشر سطوحها الجانبية ، الشكل ( ٥٤٢ ) ٠

**الحل** : نقسم قاعدة الاسطوانة الى اثني عشر جزءا متساويا ونرسم من نقاط التقسم هذه المولدات ونعين نقاط تقاطعها مع سطح المخروط ٠ بوصل هذه النقاط بخط منحني نجد خط التقاطع المنشود ٠ نشر السطواح الجانبية للاسطوانة والمخروط ترسم وفق القاعدة العامة ( انظر الفصل الحادي عشر ) ٠

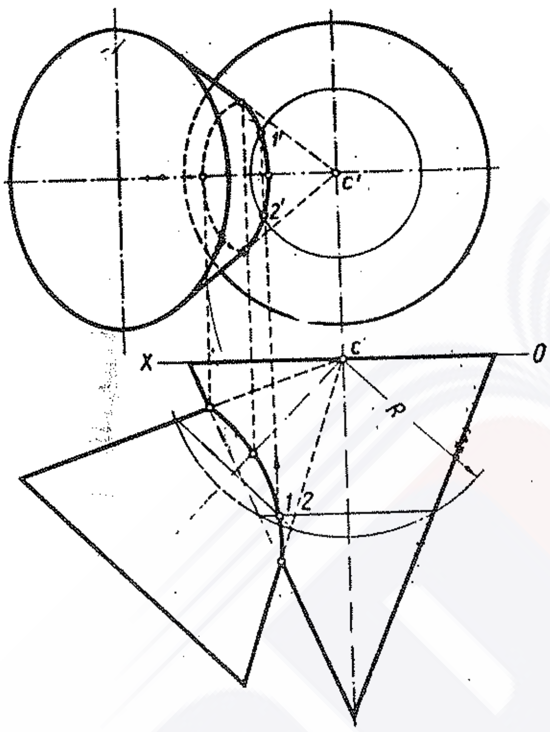
**مثال ٧** : أوجد خط تقاطع المخروطين ، الشكل ( ٥٤٣ ) ٠

**الحل** : بما أن محوري المخروطين يتقاطعان في النقطة ($c,c'$) فاننا




شكل رقم (٥٤٢)

نأخذ هذه النقطة كمركز للسطوح الكروية المساعدة . نرسم من النقطة (c,c') كرة ذات نصف قطر اختياري R فتقطع كل من السطحين المفروضين وفق دائرة مساقطها الأفقية بشكل خطوط مستقيمة ، أما الأمامية فتشكل قطوع ناقصة ( المساقط الأمامية لاتلزم لحل المسألة ، لذا فاننا لانرسم القطوع الناقصة ) . مكان تقاطع هذه الخطوط المستقيمة نجد المساقط الأفقية (2) و ( 1 ) للنقاط ومنها باستخدام مولدات مساعدة ( أو دوائر ) نجد مساقطها الأمامية (2') و (1') . بصورة مماثلة وبتغيير نصف قطر الكرة نجد بقية النقاط التي بوصلها بخط منحن نجد خط التقاطع المنشود .



شكل رقم ( ٥٤٣ )

يمكن تعيين خط التقاطع أيضا باستخدام المستويات المساعدة .لتجنيب أنشاء خطوط منحنية بواسطة الشابلون ، نأخذ هذه المستويات مارة من ذرويتي المخروطين . ان هذه الطريقة تعقد كثيرا حل المسألة .

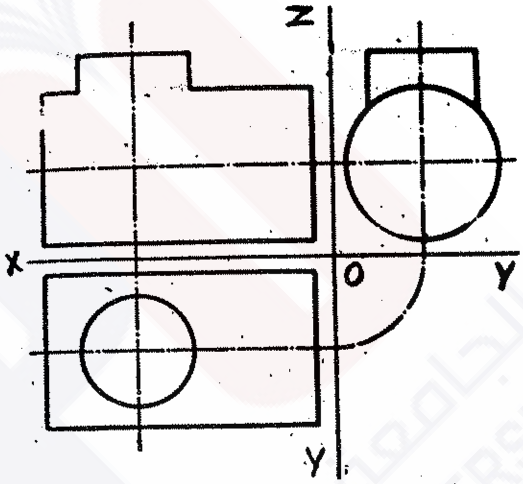
* **ملاحظة :**

١- اذا لم يتقاطع محورا المخروطين نستخدم المستويات المساعدة المذكورة أعلاه .

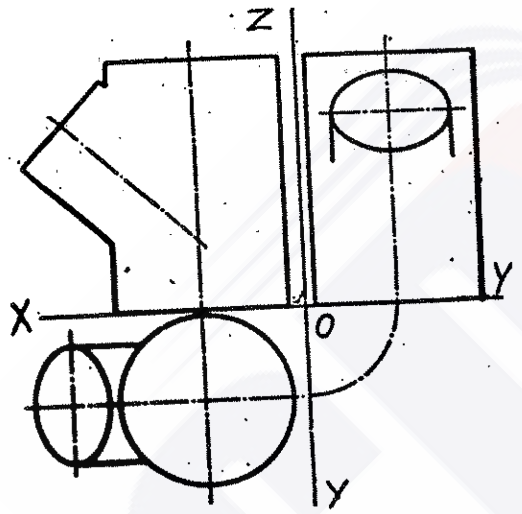
٢ـ اذا لم يكن سطحا المخروطين دورانيين نستخدم المستويات المساعـــدة المذكورة أعلاه بغض النظر عن توضع المحاور .

**ب ـ تمـــارين تطبيقيــــة :**

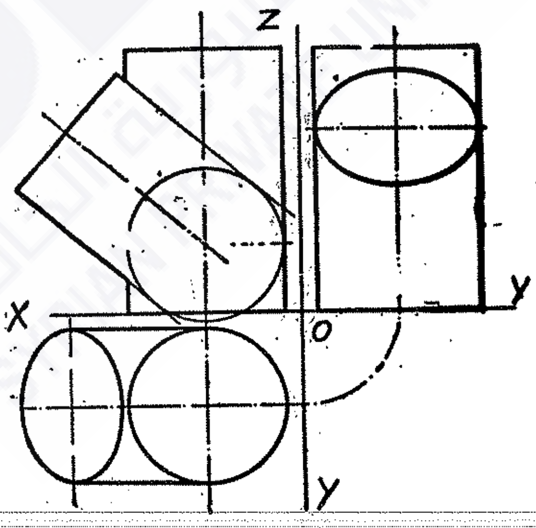
١ـ حدد خطوط تقاطع منحنيات السطوح للأشكال التالية .



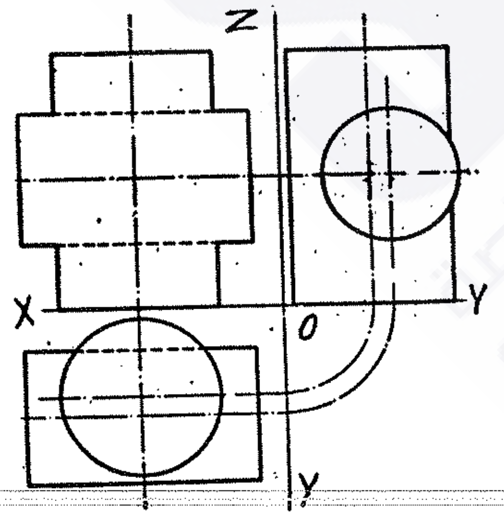

شكل رقم (٥٤٤)



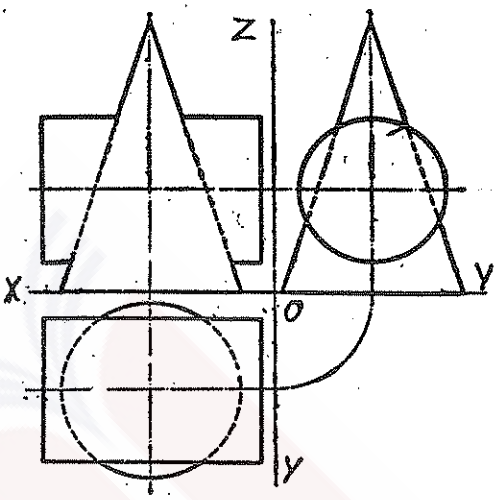

شكل رقم (٥٤٥)



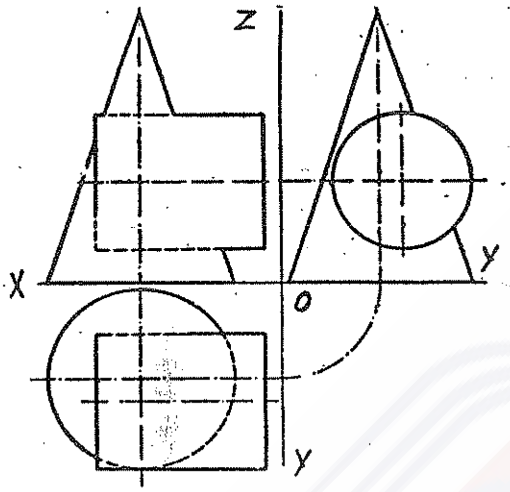

شكل رقم (٥٤٦)



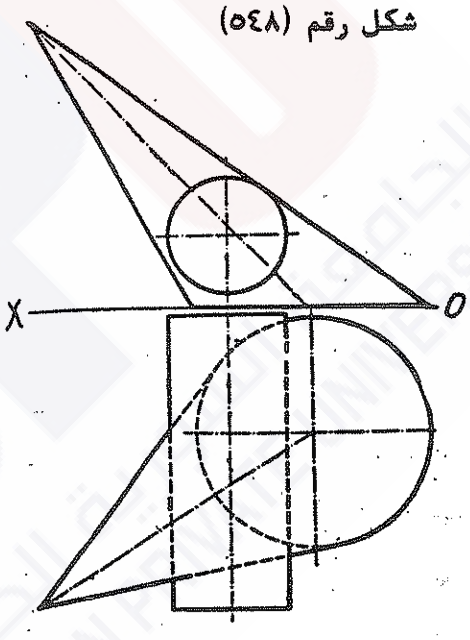

شكل رقم (٥٤٧)



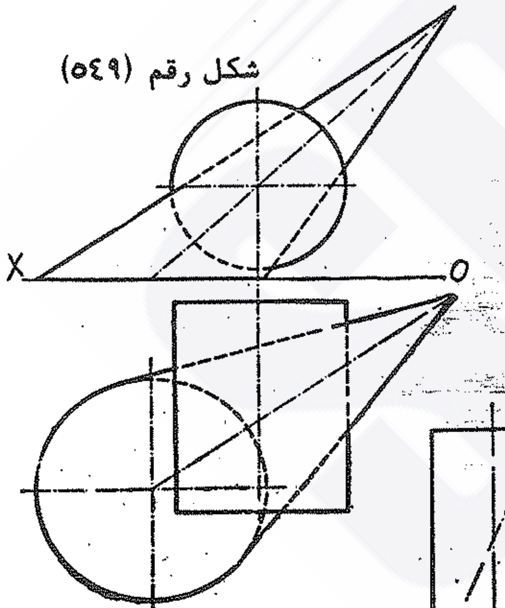

شكل رقم (٥٤٨)



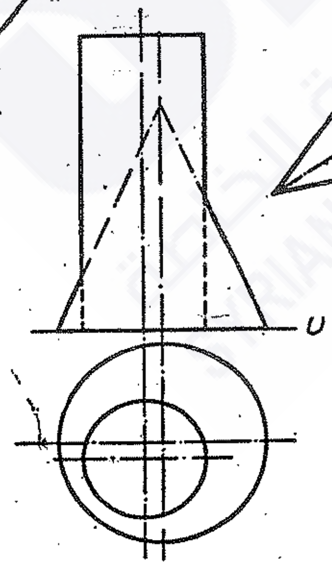

شكل رقم (٥٤٩)



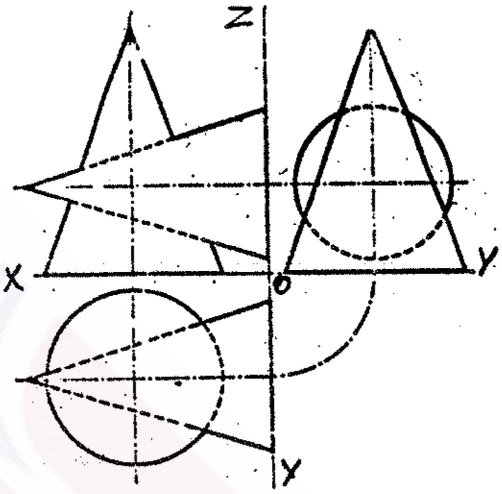

شكل رقم (٥٥٠)



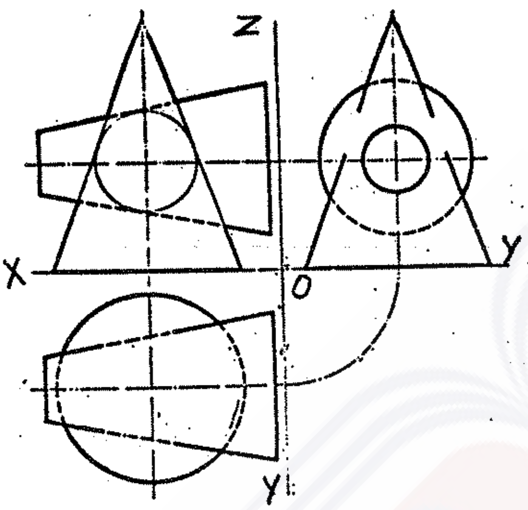

شكل رقم (٥٥١)



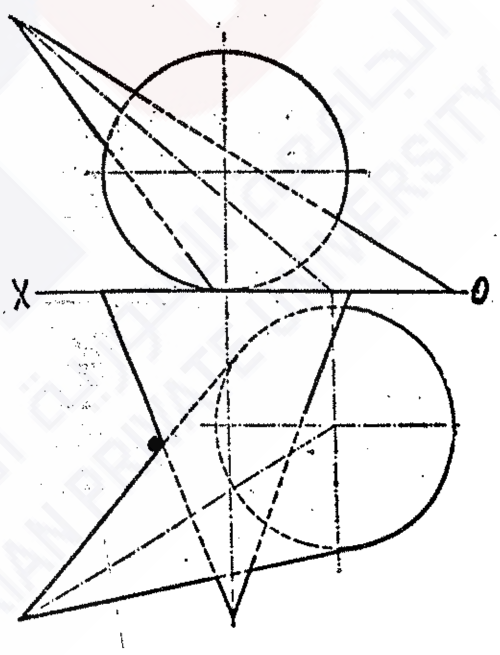

شكل رقم (٥٥٢)



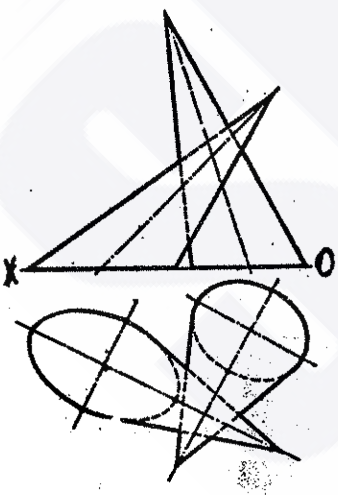

**شكل رقم (٥٥٣)**




**شكل رقم (٥٥٤)**




**شكل رقم (٥٥٥)**



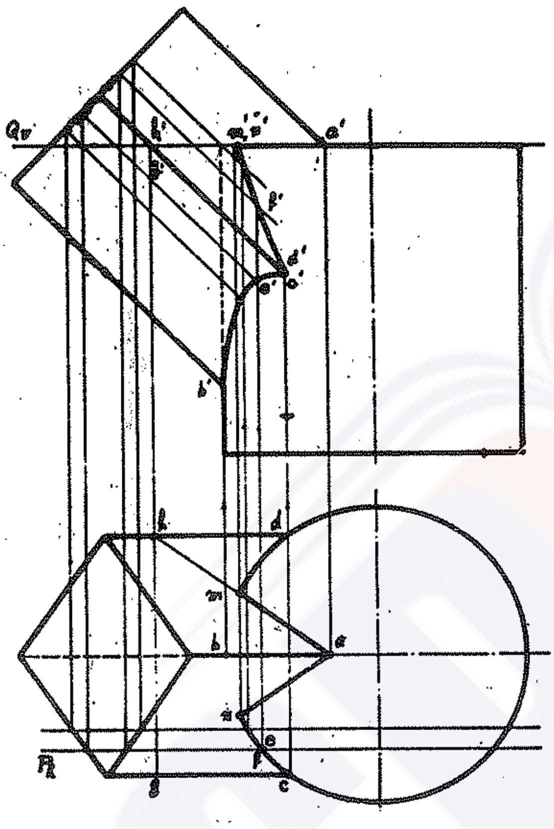

**شكل رقم (٥٥٦)**

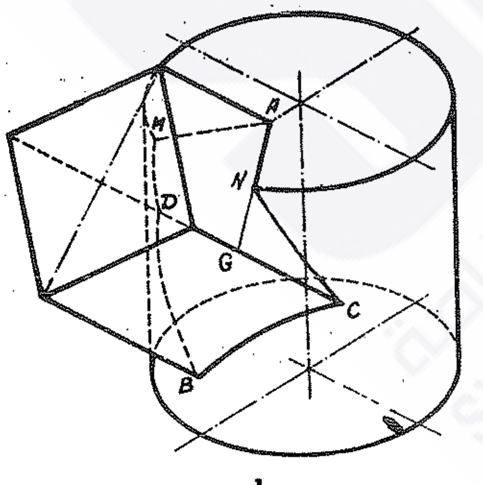
## ثانيا ــ تقاطع منحنيات السطوح مع متعددات السطوح :

### آ ــ أمثلة تطبيقية :

**مثال ١** : أنشئ منحني تقاطع الموشور مع الاسطوانة المبينة بالشكل ( ٥٥٧ ) .

**الحل** : نعين نقاط تقاطع الأحرف الجانبية للموشور مع الاسطوانة فنحصل على النقاط ( A,B,C,D ) . ثم نعين عدة نقاط عادية من منحني التقاطع وذلك بقطع السطحين بمستويات جبهية ، فالمستوي P يقطع الاسطوانة بمولدين ويقطع الموشور بمستقيمين ويتقاطع المولد الأيسر مع هذين المستقيمين بالنقطتين E,F . وبعد ذلك

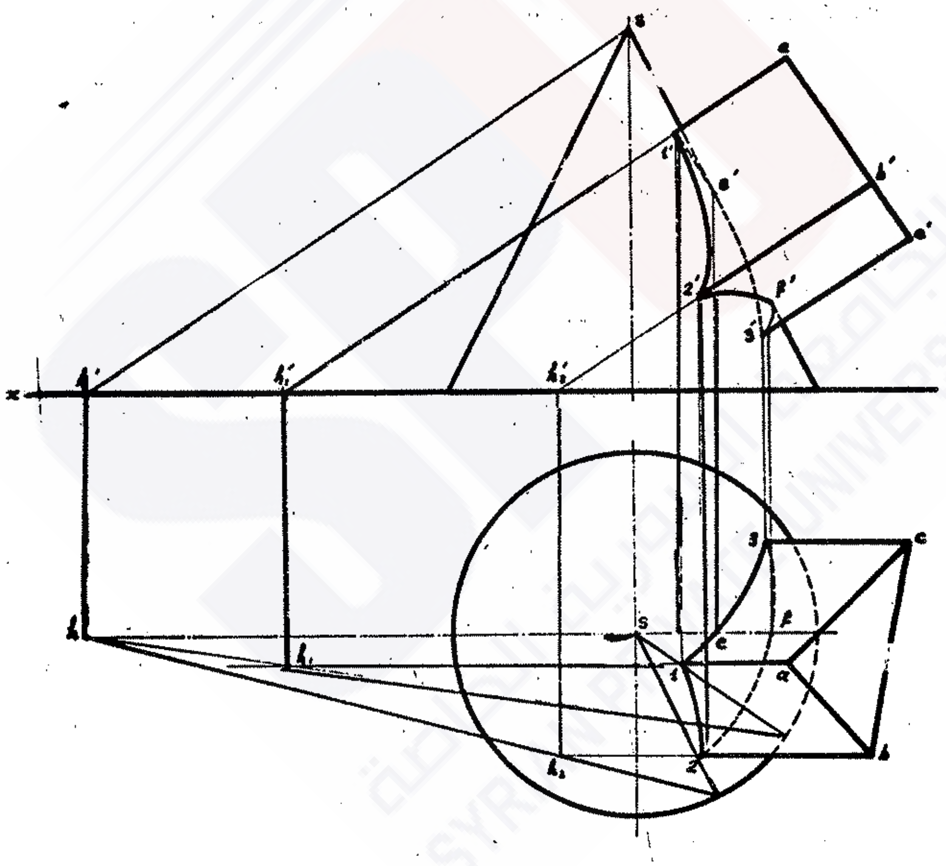



شكل رقم ( ٥٥٧ )

نعين خطي تقاطع القاعدة العلوية للاسطوانة مع الوجهين الجانبيين العلويين للموشور ، لهذه الغاية نرسم المستوي الأفقي Q المار بهذه القاعدة والذي يقطع الوجهين المذكورين بالمستقيمين AH و AG ، الجزءان المفيدان منهما هما AN و AM • وأخيرا نصل بين جميع النقاط الناتجة كما هو مبين بالرسم فنحصل على منحني التقاطع المطلوب •

**مثال ٢ :** ارسم منحني تقاطع الموشور مع المخروط المبين في الشكل(٥٥٨)•



شكل رقم ( ٥٥٨ )

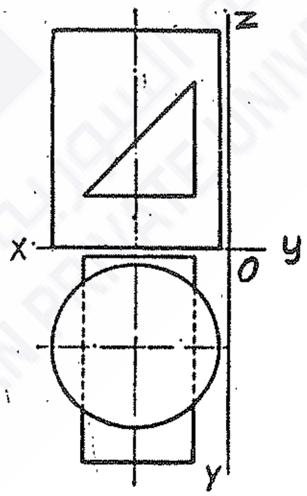
**الحل :** نعين نقاط تقاطع أحرف الموشور مع المخروط ، فنحصل على النقاط III و II و I • ثم نوجد النقطتين E,F ، ونعين عدة نقاط عادية

وذلك برسم عدة مولدات على السطح الجانبي للموشور وتعيين نقاط تقاطعها مع المخروط ، ثم نرسم مسقطي منحني التقاطع ٠

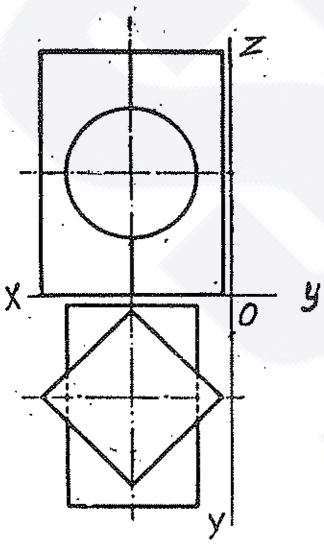
## ب ـ تمـارين تطبيقيـة :

١ـ استكمل في التعبير الاسقاطي الثلاثي مساقط متعددات السطوح المتقاطعة مع منحنيات السطوح وخطوط تقاطعها ٠ الأشكال ( ٥٥٩ ـ ٥٦٢ ) ٠

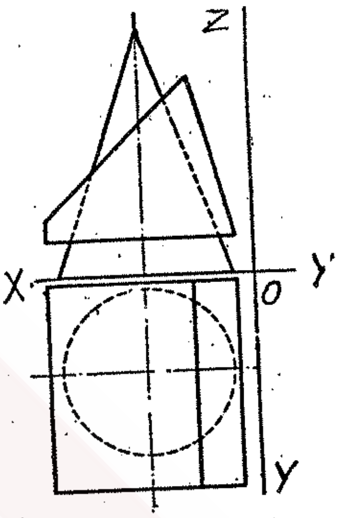
٢ـ حدد في التعبير الاسقاطي الثنائي خطوط تقاطع متعددات السطوح مع منحنيات السطوح ٠ الأشكال ( ٥٦٣ ـ ٥٧٥ ) ٠



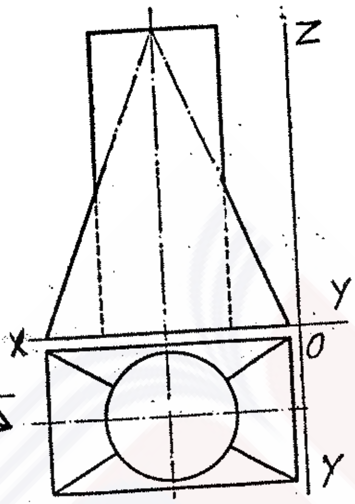

شكل رقم ( ٥٥٩ )



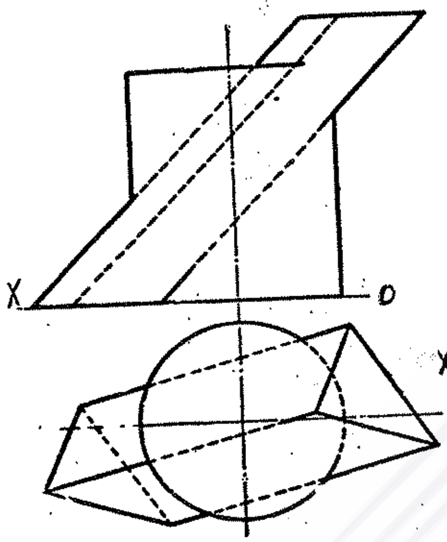

شكل رقم ( ٥٦٠ )



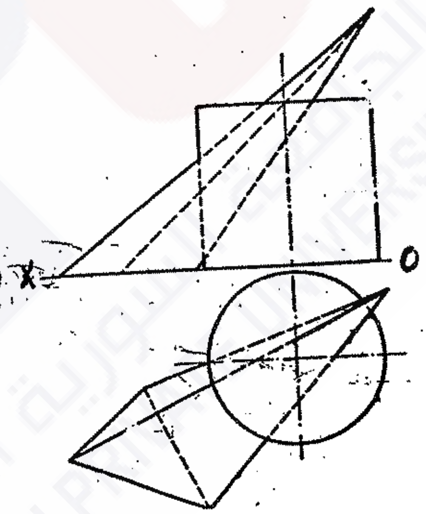
شكل رقم (٥٦١)



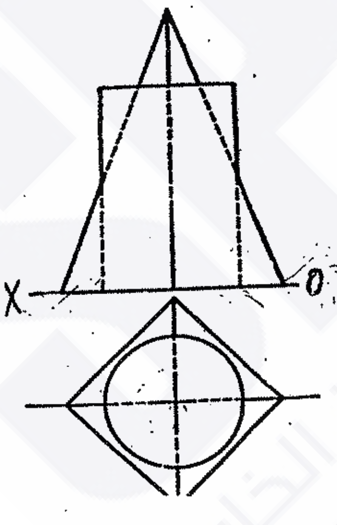
شكل رقم (٥٦٢)



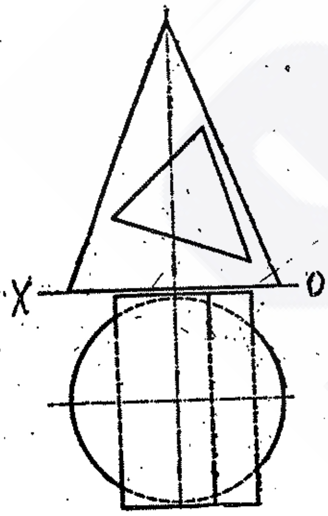
شكل رقم (٥٦٣)



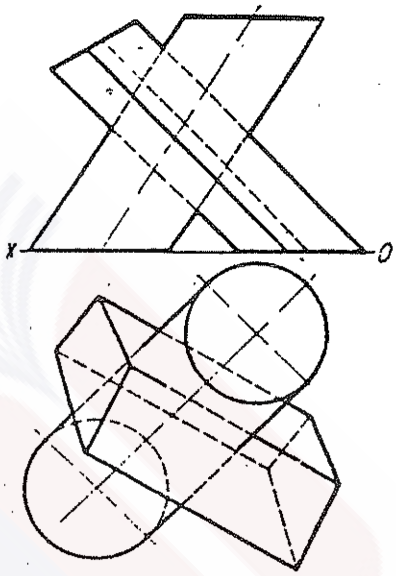
شكل رقم (٥٦٤)



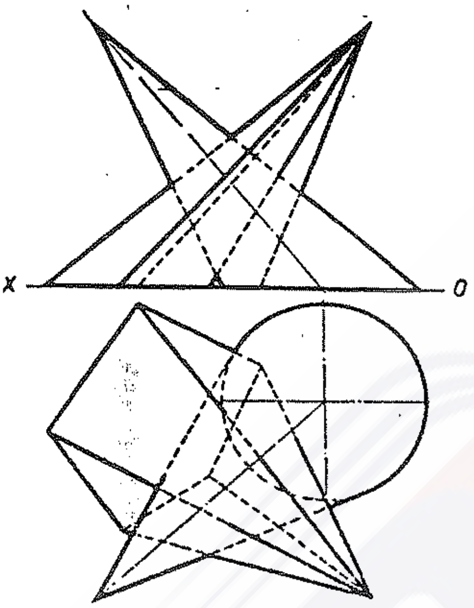
شكل رقم (٥٦٥)



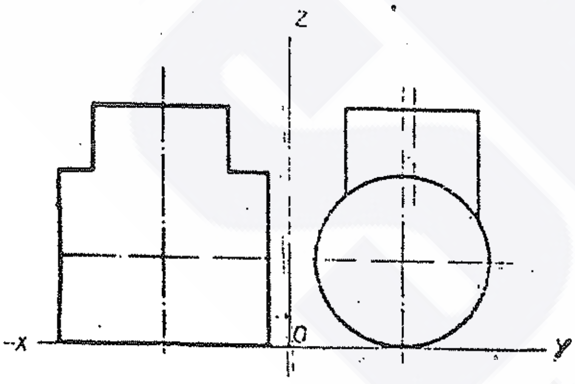
شكل رقم (٥٦٦)



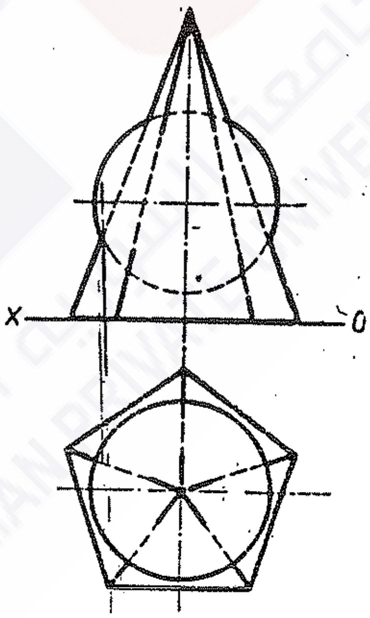

شكل رقم ( ٥٦٧ )



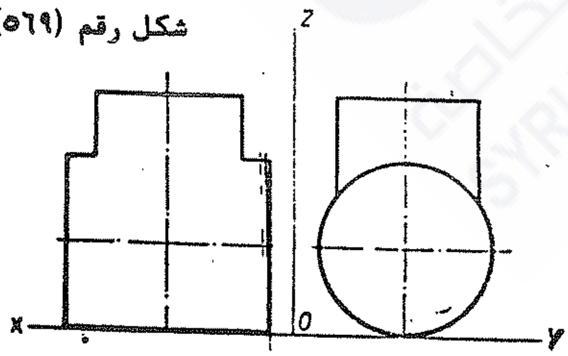

شكل رقم ( ٥٦٨ )



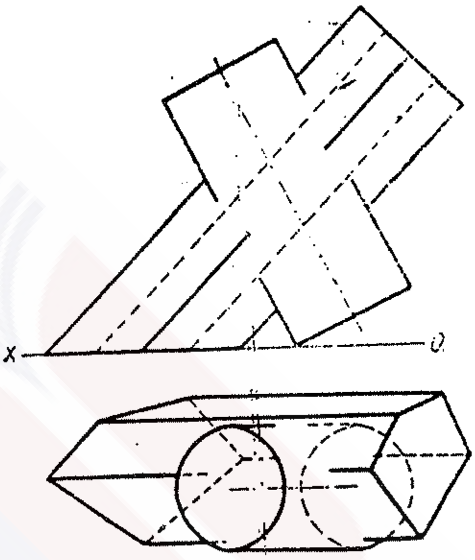

شكل رقم (٥٦٩)



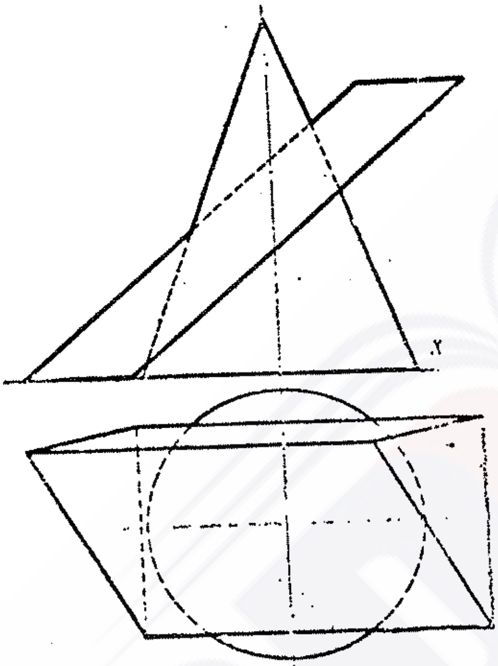

شكل رقم (٥٧٠)



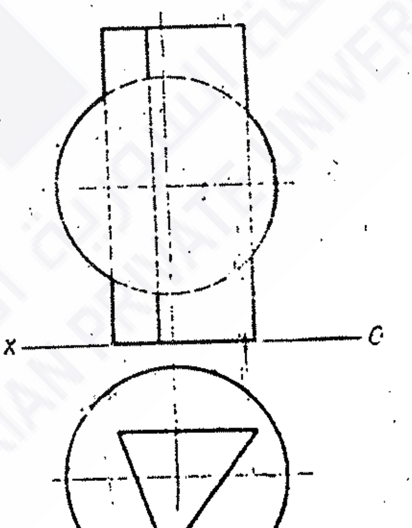

شكل رقم ( ٥٧١ )



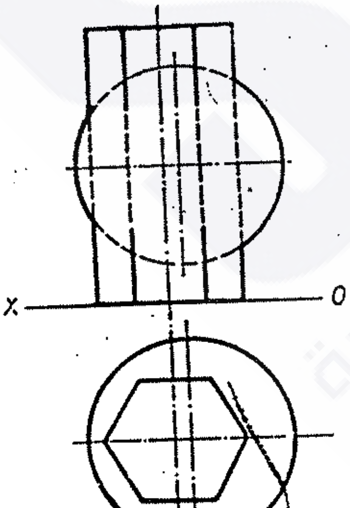

شكل رقم ( ٥٧٢ )



شكل رقم ( ٥٧٣ )




شكل رقم ( ٥٧٤ )




شكل رقم ( ٥٧٥ )